

数学のノート

目次

I	用語の定義	2
1	定義・命題・定理・補題・系	2
1.1	定義 (p.2)	
1.2	命題 (p.4)	
1.3	定理 (p.6)	
1.4	補題・系 (p.7)	
2	言い回し	9
2.1	存在 (p.9)	
2.2	一意性 (p.11)	
2.3	かつ・または (p.12)	
2.4	任意の/すべての (p.12)	
2.5	簡単のため (p.13)	
2.6	従う (p.13)	
2.7	嬉しい (p.13)	
2.8	おさえる・評価する (p.14)	
2.9	特徴づけ (p.14)	
II	論理と証明	15
3	論理	15
3.1	命題論理 (p.15)	
3.2	述語論理 (p.16)	
4	証明	17
4.1	命題の反証と反例 (p.18)	
4.2	様々な証明法 (p.19)	
III	集合	21
5	集合の定義と表記法	21
5.1	集合の定義 (p.21)	
5.2	集合の表記 (p.22)	
6	集合の演算	24
6.1	共通部分・和集合・差集合・補集合 (p.24)	
6.2	集合の分配律 (p.25)	
IV	写像	27
7	写像の定義と例	27
7.1	写像の定義 (p.27)	
7.2	写像の例 (p.28)	
7.3	像と値域, 逆像 (p.28)	
7.4	単射 (p.30)	
7.5	全射 (p.31)	
7.6	全単射 (p.32)	
	参考文献	34
	索引	35

用語の定義

概要

数学の学習を始める前に、定義・命題・定理・補題・系などの基本的な用語について理解を深めたい。「『命題』という言葉は知っているけど、『定理』とはどう違うの?」という疑問を持ったり、「『定義』と『定理』の違いがあやふやなままで、よくわからない」と感じる学生は多い。高等学校までの知識で、これらの用語を再確認することを試みよう。

1 定義・命題・定理・補題・系

1.1 定義

定義 (definition) とは、用語の意味を明確に述べたものであり、**Def** と略記される。数学のお話にうつる前に、日常的な「定義」の例を見てみよう。

Example 1.1.1: アレニウスによる酸・塩基の定義

水溶液中で水素イオン H^+ を放出する物質を酸、 OH^- を放出する物質を塩基とする。

Example 1.1.2: 「民主主義」の定義

民主主義とは、国民が政治の意思決定に直接または間接的に参加する政治体制のことをいう。

どちらもわかりやすい例であり、「すでに知っていること」と思われる読者もいるかもしれない。しかし、議論を行う上で、定義が曖昧なままだと不都合が生じることがある。

Example 1.1.3: 「速度」と「速さ」の違い

ある物体の速度 v ^{†1} は

$$v = \frac{dx}{dt}$$

と定義されるが、ここではこれを「速さ」と混同して使うとする。

物理学では「速度」は大きさと方向を持つベクトル量であり、「速さ」はその大きさだけを示すスカラー量である。実際、この場合の「速さ」を数式で表すと、 v ではなく $\|v\|$ となる。

このような違いを明確にしないと、運動の解析において誤った結論を導く可能性がある。

^{†1} \vec{v} や \mathbf{v} と表記することもあるが、大学では、文字を書く際にベクトルとスカラーの表記を区別しない場合が多いので、こもそれにならう。

Example 1.1.4: 「平均」と「期待値」の違い

平均とは、実際に得られたデータをならした値である。たとえば、 n 個のデータ x_1, x_2, \dots, x_n の平均は

$$\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}$$

で与えられる。

平均の定義に基づくと、1, 4, 10 という 3 個のデータの平均は

$$\frac{1 + 4 + 10}{3} = 5$$

である。

一方、期待値とは、各値にその値が出る確率をかけて足し合わせたものである。たとえば、ある確率変数 X が 1, 4, 10 をそれぞれ $\frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{2}{3}$ の確率でとるとき、その期待値は

$$E[X] = 1 \cdot \frac{1}{6} + 4 \cdot \frac{1}{6} + 10 \cdot \frac{2}{3} = 7.5$$

である。

このように、平均は実際のデータから求める値であり、期待値は確率を用いて求める値である。

同じ事柄について、2 つ以上の定義の形式があることもある。次は数学における例を見てみよう：

Example 1.1.5: 「絶対値」の定義

$x \in \mathbb{R}$ に対して、 x の絶対値を $|x|$ とかき、次のように定義する：

$$|x| := \max\{x, -x\}.$$

この定義は以下のような形式で表現してもよい：

$$|x| := \sqrt{x^2}.$$

次に、定義の性質についてみていこう。線型代数の講義で学ぶことであるが、逆行列の定義は以下のようになる：

Example 1.1.6: 「逆行列」の定義

正方行列 A に対して、 $BA = AB = E$ となるような B が存在するとき、このような B を A の逆行列という。

ここで注意するのは **数学では定義は最小限の情報にとどめることが慣習となっている** ということである。たとえば、**Example 1.1.6** から、以下の命題^{†1}が成り立ち、その証明は容易である。

^{†1} 「命題」については、のちほど詳しくみていくとする。ここでは「証明を与えるべきである主張」という理解でよい。

Proposition 1.1.7: 逆行列の一意性

正方行列 A に対して、 A の逆行列は存在するとすればただひとつである。

証明.

A の逆行列が B, C であるとする、

$$AB = BA = E, \quad AC = CA = E$$

が成り立つ。このとき、

$$B = BE = B(AC) = (BA)C = EC = C.$$

よって、 $B = C$ であり、逆行列の一意性が示された。□

このことから、**Example 1.1.6** でとりあげた逆行列の定義をもっと詳しく

正方行列 A に対して、 $BA = AB = E$ となるような B が存在するとき、このような B はただひとつで、 B を A の逆行列という。 B は一意に存在するので、これを A^{-1} と記す¹²。もちろん

$$AA^{-1} = A^{-1}A = E.$$

と、「逆行列の一意性を定義に含めてもいいのではないか。」と主張する人がいるかもしれない。ただ、数学では「定義は最小限の情報にとどめ、そこから導かれる主張を命題として証明する」という慣習があり、なにが「定義」で、なにが「証明すべきこと」であるかはっきりさせることが多い¹³。

1.2 命題

数学において、**命題 (proposition)** とは、真偽が定まっている文を指す¹⁴。つまり、命題は「真の命題」と「偽の命題」のいずれかであり、異なるふたつの値を持つこのような論理体系は**二値論理**と呼ばれる。以下では、命題が真であることを T 、偽であることを F と表すことにする。

先の「命題」の定義にあてはまらないとされる主張には

- (1) 定義が曖昧なもの
- (2) 意味が曖昧なもの
- (3) パラドックス

などがある。(1), (2) についてはのちほど説明するとして、ここでは (3) について例をあげよう。

¹² 一意に存在することがわかっていないと、 A^{-1} のような記法で表すことはためらわれる。

¹³ ただ、実際はここで取り上げた逆行列の定義も情報過多である。線型代数で学ぶことになるが、 $AB = E$ と $BA = E$ のどちらか片方の式のみで定義してよいからである。

¹⁴ 数学でいう「命題」には、「広い意味」と「狭い意味」がある。「広い意味」では、真であるか偽であるかがはっきり決まる文を命題という。これに対して、「狭い意味」では、「定理」「補題」などと同じように、数学の正しい主張につけられる呼び名の一つとして「命題」という語を用いる。ここでの「命題」は、後者の「狭い意味」ではなく、前者の「広い意味」で用いる。

Example 1.2.1: 自己言及のパラドックス

次のような主張を考える：

この文は偽である。

この主張は、自己言及のパラドックスであり、真偽が決まらない。

以下も自己言及のパラドックスの例である：

「この壁に貼り紙をしてはならない」と書かれた貼り紙

ここまでで、二値論理でとりあげない主張を述べてきたが、そろそろ二値論理で取り扱う主張のお話に戻ろう。また、以下では簡単のために、「広い意味での命題」と「狭い意味での命題」のどちらも「命題」と記すと約束する。

Example 1.2.2: 命題

次に示す文は真偽が真の命題である：

- (1) 「 $1 + 1 = 2$ 」
- (2) 「 $23 > 17$ 」
- (3) 「円周率は 100 未満である」
- (4) 「霞ヶ浦は日本で二番目に面積が大きい湖である」

また、次に示す文は真偽が偽の命題である：

- (a) 「 $1 + 1 = 46$ 」
- (b) 「 $23 > 26$ 」
- (c) 「円周率は 3 未満である」
- (d) 「霞ヶ浦は日本で五番目に面積が大きい湖である」

Example 1.2.3: 命題でない文

次に示す文は命題ではない：

- (A) 「 $1 + 1$ 」 (なにも主張しておらず、真か偽か判定できない)
- (B) 「霞ヶ浦の面積は大きい」 (客観的に大きいか判定できない)
- (C) 「10000 は大きい」 (数字であっても、「大きい」の基準が明確でなく、客観的に真か偽か判定できない)
- (D) 「桃はおいしい」 (基準が明確でなく、客観的に真か偽か判定できない)
- (E) 「早く起きなさい」 (命令文であって、真か偽か判定できない)
- (F) 「 $x^2 > 4$ 」 (x に具体的な値を代入しないと真か偽か判定できない)

1.3 定理

数学において、**定理 (theorem)** とは、正しいと分かっている数学の主張¹⁵の中でもとりわけ重要なものを指す。Thm と略記される。

定理は数学における真理であり、議論を進める上での基礎となる。定理は後述する「証明」によって裏付けられているため、正しいことが保証されている。

定理が重要な主張であるがゆえに、「余弦定理」・「加法定理」・「ハイネ・ボレルの被覆定理」など、固有の名前が与えられているものも存在する。その固有の名前は、定理の主張の詳細、もしくは発見者の名前になんかで付けられることが多い。例えば、「三平方の定理¹⁶」や「コーシー・シュワルツの不等式」である。

Example 1.3.1: 三平方の定理

三平方の定理の主張は以下のようになる：

直角三角形の斜辺の長さを c とし、他の二辺の長さを a , b としたとき、

$$a^2 + b^2 = c^2$$

が成り立つ。

Example 1.3.2: コーシー・シュワルツの不等式

コーシー・シュワルツの不等式は、内積空間における基本的な不等式であり、以下のように表される：

任意の内積空間において、ベクトル u と v に対して、

$$\|\langle u, v \rangle\| \leq \|u\| \cdot \|v\|$$

が成り立つ。

この不等式は解析学や線型代数学など、多くの分野で重要な役割を果たす。

Example 1.3.3: 微分積分学の基本定理

この定理は微分と積分の関係を明らかにするものであり、以下のように述べられる：

f を区間 $[a, b]$ 上で連続な実数値関数とする。このとき、

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt$$

¹⁵ つまり、「狭い意味での命題」のこと。

¹⁶ 「ピタゴラスの定理」とも呼ばれる。

と定義すると、 F は $[a, b]$ 上で微分可能であり、

$$F'(x) = f(x)$$

が成り立つ。

この定理により、積分と微分が互いに逆操作であることが示される。

1.4 補題・系

補題 (lemma) とは、定理や命題を証明する際に、その証明の一部として利用される補助的な命題のことを指す。**Lem** と略記される。補題は、直接的に重要な結果でない場合もあるが、より複雑な定理を証明するための重要なステップとなる主張である。

一方、**系 (corollary)** とは、既に証明された定理や命題から直接的に導かれる結果のことである。**Cor** と略記される。系は先の結果を応用することで容易に得られる新たな命題であり、元の定理の応用例や特別な場合を示すことが多い。

補題や系を説明するためには、関連するいくつかの命題や定理が必要である。以下に具体的な例を示す。

Example 1.4.1: (補題) ロルの定理

実数値関数 f が閉区間 $[a, b]$ で連続、开区間 (a, b) で微分可能、かつ $f(a) = f(b)$ とする。このとき、

$$f'(c) = 0$$

を満たす点 $c \in (a, b)$ が少なくとも1つ存在する。

証明.

最大値・最小値の定理¹⁾により、 f は $[a, b]$ で最大値 M と最小値 m をとる。

- (i) f が定数の場合：任意の $x \in [a, b]$ で $f'(x) = 0$ なので、任意の $c \in (a, b)$ で $f'(c) = 0$ となる。
- (ii) f が定数でない場合：端点では $f(a) = f(b)$ だから、 $M > f(a)$ または $m < f(a)$ が成り立つ。したがって、 f の最大値または最小値は内部点 $c \in (a, b)$ にて達成される。

c で最大をとる場合を示す (最小のときは不等号が逆になる)。 $h > 0$ とすると、 $f(c+h) \leq f(c)$ だから

$$\frac{f(c+h) - f(c)}{h} \leq 0, \quad \therefore f'_+(c) := \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(c+h) - f(c)}{h} \leq 0.$$

一方 $h < 0$ では同様に

$$\frac{f(c+h) - f(c)}{h} \geq 0, \quad \therefore f'_-(c) := \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(c+h) - f(c)}{h} \geq 0.$$

f の点 c における微分可能性により、 $f'_+(c) = f'_-(c) = f'(c)$ であるから、

$$0 \leq f'(c) \leq 0, \quad \therefore f'(c) = 0.$$

このことから、直ちに主張が従う。 □

^{†1} ここでは、最大値・最小値の定理の成立を認めるものとする。

Example 1.4.2: (定理) 平均値の定理

実数値関数 f が $[a, b]$ で連続, (a, b) で微分可能なら, ある $c \in (a, b)$ が存在して

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

が成り立つ。

証明.

関数 g を

$$g(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$$

と定義すると, $g(a) = g(b)$ であり, なおかつ g は $[a, b]$ で連続, (a, b) で微分可能なので, ロルの定理より (a, b) に $g'(c) = 0$ を満たす c がある. すると

$$0 = g'(c) = f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

この式から, ただちに主張が従う。 □

Example 1.4.3: (系1) $f'(x) = 0$ なら f は定数

実数値関数 f が区間 I で微分可能で $f'(x) = 0$ ($x \in I$) とする. このとき f は I 上で一定である.

証明.

任意の $x < y$ に平均値の定理を適用すると, ある $c \in (x, y)$ があって

$$\frac{f(y) - f(x)}{y - x} = f'(c) = 0.$$

よってこのとき $f(y) = f(x)$ である.. いま x, y は任意なので f は I 上で一定である。 □

Example 1.4.4: (系2) 導関数の符号と単調性

実数値関数 f が区間 I で微分可能とする.

- (1) $f'(x) \geq 0$ ($x \in I$) なら f は I で単調増加関数である.
- (2) $f'(x) \leq 0$ ($x \in I$) なら f は I で単調減少関数である.

証明.

(1) を示す. $x < y$ をとると平均値の定理により

$$\frac{f(y) - f(x)}{y - x} = f'(c) \quad (c \in (x, y))$$

となる. 右辺は 0 以上, かつ $y - x > 0$ だから $f(y) - f(x) \geq 0$ である. このことからただちに主張が従う. (2) も同様である. \square

2 言い回し**2.1 存在**

数学の証明において, 「存在」は重要な概念である. といっても, あまりこのことを意識したことのない読者の方もいると思うので, この場を借りて具体例をもとに説明を試みることにする.

まず, 以下に記す「最大値・最小値の定理」を考える:

$[a, b]$ で連続な関数 f に対して, f は $[a, b]$ 上で最大値と最小値を持つ.

「最大値・最小値が存在するなんて当たり前だ」と思われる読者もいるかもしれない. しかし, 本当にそれは自明なのか. 実際には, 関数の連続性や区間の閉有界性といった条件が揃って初めて, 最大値や最小値の「存在」を保証できる. この定理を証明するにあたっては, 厳密な数学的議論が必要となる.

「存在」の重要性がわかる例として, 「極限値の存在」に関する命題を以下で考えてみよう:

Proposition 2.1.1

以下のような漸化式で定められた数列 $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ を考える:

$$\begin{cases} x_1 = 0, \\ x_{n+1} = \sqrt{x_n + 2}. \end{cases}$$

このとき, $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ は収束し, 極限値は次のようになる:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 2.$$

証明.

いくつかの補題を確認しつつ示す.

Lemma 2.1.2

任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して, 以下の不等式が成り立つ:

$$x_n \leq x_{n+1} < 2.$$

証明.

数学的帰納法により, $x_n \leq x_{n+1} < 2$ を示す.

(I)

$n = 1$ のとき, $x_1 = 0$, $x_2 = \sqrt{0+2} = \sqrt{2}$ なので, $0 \leq \sqrt{2} < 2$ により, $x_1 \leq x_2 < 2$ である.

(II)

$k \in \mathbb{N}$ を任意にとり, $x_k \leq x_{k+1} < 2$ であると仮定する.

このとき, $x_{k+1} < 2$ により $x_{k+1} + 2 < 4$ なので, 以下の式が成り立つ:

$$x_{k+2} = \sqrt{x_{k+1} + 2} < 2.$$

また, $x_k \leq x_{k+1}$ により, $x_k + 2 \leq x_{k+1} + 2$ であるから,

$$x_{k+1} = \sqrt{x_k + 2} \leq \sqrt{x_{k+1} + 2} = x_{k+2}.$$

よって, $n = k + 1$ の場合にも成り立つ.

以上 (I), (II) により, 任意の $n \in \mathbb{N}$ について, 以下の不等式が成り立つ:

$$x_n \leq x_{n+1} < 2.$$

□

Lemma 2.1.3

$(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ は $0 < x \leq 2$ なる極限 x に収束する.

証明.

先の補題により, 任意の $n \in \mathbb{N}$ について, $x_n \leq x_{n+1} < 2$ なので, 数列 $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ は単調に増加し, 上に有界である.

よって

$$x := \sup\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$$

が存在し, $x \leq 2$ である.

$x > 0$ は明らかであるから, 以上の考察によりこの命題が証明された. □

ここまでで, $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ の極限値の存在が確認されたので, 先の漸化式について,

$$x = \sqrt{x+2}$$

とする. これを解くと $x = -1, 2$ であるが, $x > 0$ により $x = 2$ である.

以上の考察により, 数列 $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ は収束し,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 2.$$

□

ここまで考察して, ようやく数列 $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ が収束することを確認できた. この例では「極限値の存在」を確認する意味がわからない読者もいるかもしれないので, もう一つ例を挙げよう.

以下のような漸化式で定められた数列 $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ を考える：

$$\begin{cases} y_1 = 1, \\ y_{n+1} = 2y_n + 2. \end{cases}$$

この数列の極限值が存在すると仮定して、それを y とおこう。

与えられた漸化式により、

$$\begin{aligned} y &= 2y + 2, \\ \therefore y &= -2. \end{aligned}$$

しかし、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = \infty$$

なので、 $y = -2$ は誤りである。

このように、数列の極限が存在することを確認しないと、誤った結論に到達することがある。この例から分かるように、存在を確認することは重要なことであるのだ。

2.2 一意性

読者の中には線型代数の講義で「逆行列の一意性」などに触れた方もいると思われる。線型代数以外の分野でも、数学の学習を進める際に、「一意性」が重要である場面は多い。なぜ「一意性」が重要であるのか、一つ例を挙げて考えてみることにしよう。

微分積分の講義で習う定理に「平均値の定理」というものがある。その主張は

$[a, b]$ で連続、 (a, b) で微分可能な関数 f に対して、

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$$

をみたす $c \in (a, b)$ が存在する。

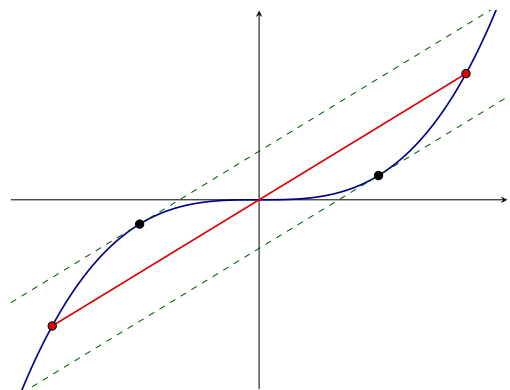
というものである。証明はのちに述べるとして、この定理の主張を少し変更してみよう：

$[a, b]$ で連続、 (a, b) で微分可能な関数 f に対して、

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$$

をみたす $c \in (a, b)$ がただひとつ存在する。

ここで「 $c \in (a, b)$ が存在する」という主張を「 $c \in (a, b)$ がただひとつ存在する」というより強い主張に変更した。この主張の真偽は偽である。このことが問題になる状況を挙げよう。



$f(x) = x^3$ という関数を考える. この関数は $[-1, 1]$ で連続, $(-1, 1)$ で微分可能である. このとき, 図のように, 条件を満たす $c \in (-1, 1)$ は複数存在するので, 「ただひとつ存在する」という主張は偽である. さらに言えば, 2本より多くこのような接線を引ける場合もある^{†7}.

このことから, 安易に「ただひとつ存在する」などと強い主張をすることは避けるべきであることがわかる. このことは平均値の定理に限らず, 中間値の定理なども同様である.

2.3 かつ・または

数学において, 「かつ」は日常とほとんど同じ意味で使われるが, 「または」の使い方は日常とは異なる. 以下に例を挙げよう.

Example 2.3.1: 「または」の使用例

(A) ランチメニューの主食として, 米またはパンがついてくる^{†1}.

(B) 「運転免許を持っていない人」または「18歳未満の人」はレンタカーを借りることができない.

(A) は「どちらか片方のみ」の意味で「または」を使い, (B) は「いずれかが」の意味で「または」を用いている.

^{†1} この文を「米とパンの両方が食べられる」と解釈してもらっては困る.

数学では, 「または」は「いずれかが」の意味で使われ, 「どちらか片方のみ」の意味で使われることはない.

たとえば, A, B を集合とするとき,

$$x \in A \cup B$$

は「 x は A の元であるか, B の元であるか, あるいは両方である」という意味である. つまり, 「 $x \in A$ であり, $x \notin B$ である」あるいは「 $x \notin A$ であり, $x \in B$ である」といった状況のときにも, $x \in A \cup B$ と記す.

2.4 任意の/すべての

数学において, 「任意の」と「すべての」はニュアンスが異なる. 英語では, 「任意の」は “for any”, 「すべての」は “for all” に相当する. “for any” のニュアンスは「複数の対象があり, その中のどの一つをとっても」という意味であり, “for all” は「対象全体を見て, すべてのものが」という意味である.

たとえば, $A = \{1, 2, 3\}$ という集合を考えるとき,

(i) 「 A の任意の元と 1 の総和」

(ii) 「 A のすべての元と 1 の総和」

というとき, (i) は「 $1+1, 2+1, 3+1$ のいずれか」という意味であるのに対し, (ii) は「 $(1+1)+(2+1)+(3+1)$ 」

^{†7} 確認してみよ.

という意味になる。このことからわかるように、「任意の」を「すべての」で置き換える場合には、このようなニュアンスの違いに注意しなければならない。

2.5 簡単のため

「簡単にするために」のほうがじっくりくる方もおられるかもしれないが、これは“For simplicity”の訳で、その後の議論を簡単にするために「議論することが楽な仮定」を設ける際に使う言葉である。

Example 2.5.1: 「簡単のため」の使用例

(A) 簡単のため、平行移動して頂点が原点にある形として、 $f(x) = ax^2$ を考える。

2.6 従う

数学において「従う」は日常とはまた違った意味で使われる。日常だと「王に従う」や「上司に従う」など、「命令を受けてそれに従う」という意味で使われることが多いが、数学では「 A という事柄から、すぐ B という事柄がわかる」という場合に「 A から B が従う」という。

Example 2.6.1: 「従う」の使用例

(A) n が偶数であることから、 n^2 が偶数であることが従う。

(B) G が群であることから、 $G \neq \emptyset$ が従う^{†1}。

^{†1} 群であれば単位元が存在することは群の定義からわかる。そのため群は空集合でない。

2.7 嬉しい

日常では、「嬉しい」という言葉は「喜びを感じる」という意味で使われることが多いが、数学の文脈では「都合がよい」、「議論が楽になる」という意味でたびたび使われる。

Example 2.7.1: 「嬉しい」の使用例

$$\int_{\alpha}^{\beta} (x - \alpha)(x - \beta) dx = -\frac{(\beta - \alpha)^3}{6}$$

であることを示したい。このときに

$$\int_{\alpha}^{\beta} (x - \alpha)(x - \beta) dx = \int_{\alpha}^{\beta} (x - \alpha)\{(x - \alpha) - (\beta - \alpha)\} dx$$

と変形してなにが嬉しいかというと、

$$\begin{aligned} \int_{\alpha}^{\beta} (x - \alpha)\{(x - \alpha) - (\beta - \alpha)\} dx &= \int_{\alpha}^{\beta} \{(x - \alpha)^2 - (\beta - \alpha)(x - \alpha)\} dx \\ &= \left[\frac{(x - \alpha)^3}{3} - \frac{(\beta - \alpha)(x - \alpha)^2}{2} \right]_{\alpha}^{\beta} \\ &= -\frac{1}{6}(\beta - \alpha)^3 \end{aligned}$$

というふうに、簡単に計算できるからである。

2.8 おさえる・評価する

数学の文脈では「おさえる」という言葉は、ある数 M を、別の数 K を用いて、 $K < M$ という形で表すことを指す。より詳しく「上からおさえる」と表すこともある。

また、数学の文脈で「評価」という言葉は、ある数 M を不等式で表し、その数がどの程度の大きさであるかを示すことを指す。たとえば、 $1 < M < 4$ と表すことは「 M を 1 より大きく 4 より小さいと評価する」ということを指す。さらに、上記の M を $2 < M < 3$ と表すことができる場合は、後者の表現のほうが「評価が厳しい」ということができる。

Example 2.8.1: 「おさえる」と「評価する」の使用例

- (A) 数列 $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ を $a_n < M$ と上からおさえる。
- (B) e の値を $2.7 < e < 2.8$ と評価する。

2.9 特徴づけ

数学の文脈では、「特徴づけ」という言葉がよく使われる。これは、ある対象が持つ性質を使ってその対象をただひとつと特定することを指す。

Example 2.9.1: 「特徴づけ」の使用例

- (A) 実数の連続性の公理は、実数の集合を特徴づけるものである^{†1}。

^{†1} この言葉の意味がよくわからない読者は、解析学の教科書を参照していただくことを推奨する。

論理と証明

3 論理

3.1 命題論理

命題論理では、命題を結合するために記号を用いる。代表的な論理記号を列挙してみよう：

表1 命題論理の記号

記号	意味
\wedge	かつ (論理積)
\vee	または (論理和)
\neg	否定
\rightarrow	ならば (含意)
\leftrightarrow	同値

これらの論理記号を用いて、命題を結合し、複雑な論理式を構成することができる。以下に、基本的な命題の真理値表を載せよう。

表2 否定命題の真理値表

P	$\neg P$
T	F
F	T

表3 恒真命題と矛盾命題の真理値表

P	$\neg P$	$P \vee \neg P$	$P \wedge \neg P$
T	F	T	F
F	T	T	F

表4 論理和 (積) の真理値表

P	Q	$P \wedge Q$	$P \vee Q$
T	T	T	T
T	F	F	T
F	T	F	T
F	F	F	F

表5 「含意」の真理値表

P	Q	$P \rightarrow Q$
T	T	T
T	F	F
F	T	T
F	F	T

表6 「同値」の真理値表

P	Q	$P \leftrightarrow Q$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	T

上記の真理値表によって、命題論理の記号を定義する。以下、左辺 P と右辺の Q の真理値が等しいことを $P \equiv Q$ と表し、この記号をもって「同値」を表すことにする。

Proposition 3.1.1

命題 P, Q, R に対して、次の式が成り立つ：

交換律

$$P \wedge Q \equiv Q \wedge P, \quad P \vee Q \equiv Q \vee P$$

結合律

$$(P \wedge Q) \wedge R \equiv P \wedge (Q \wedge R), \quad (P \vee Q) \vee R \equiv P \vee (Q \vee R)$$

分配律

$$P \wedge (Q \vee R) \equiv (P \wedge Q) \vee (P \wedge R), \quad P \vee (Q \wedge R) \equiv (P \vee Q) \wedge (P \vee R)$$

ド・モルガンの法則

$$\neg(P \wedge Q) \equiv \neg P \vee \neg Q, \quad \neg(P \vee Q) \equiv \neg P \wedge \neg Q$$

Proposition 3.1.2

命題 P , Q に対して, 次の式が成り立つ:

含意の等価表現

$$P \rightarrow Q \equiv \neg P \vee Q$$

同値の等価表現

$$P \leftrightarrow Q \equiv (P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow P)$$

3.2 述語論理

Example 1.2.3 の (F) において, 「 $x^2 > 4$ 」という文について考えた. この文は命題ではないが, たとえば $x = 3$ を代入したときは真, $x = 0$ を代入したときは偽である. つまり, x になにかしら値を代入すると, この文は真偽が決まり, 命題となるのである.

このような「値が決まっていない変数を含み, 変数に何かを代入すると真偽が判定できる」という性質を持つ文を**述語**という. そして, 述語を用いて命題を表現する論理を**述語論理**という.

述語論理においてはいくつかの記号を用いる. 次の表で確認しよう:

表7 述語論理の記号

記号	意味
\forall	任意の (全称量化)
\exists	存在する (存在量化)

これらの記号を用いて, 述語を命題にすることができる. \forall と \exists をまとめて**量量子**とよぶ.

Definition 3.2.1: 全称命題

$P(x)$ を述語とする.

$$\forall x : P(x)$$

は, 「すべての x について, $P(x)$ が成り立つ」という意味であり, これを**全称命題**という.

Definition 3.2.2: 存在命題

$Q(x)$ を述語とする.

$$\exists x : Q(x)$$

は、「 $Q(x)$ が成り立つような x が存在する」という意味であり、これを**存在命題**という.

Example 3.2.3: 量化記号の例

- $\forall x \in \mathbb{R} : x^2 \geq 0$
「任意の実数 x について、 x^2 は 0 以上である。」
- $\exists x \in \mathbb{Z} : x^2 = 4$
「ある整数 x が存在して、 $x^2 = 4$ となる。」

4 証明**4.0.1 証明とは**

数学において、主張が正しいことを示すプロセスを**証明 (proof)** という.

先の例で、命題・定理・補題・系は証明されるべきものであるが、定義は一般に「証明すべきこと」でないことに注意したい¹⁸.

以下で、証明の例をいくつか見てみよう：

Example 4.0.1: 証明① (余りの計算)

「任意の奇数 n について、 n^2 を 4 で割った余りは 1 である」という命題を証明しよう：

奇数 n は、ある整数 k を用いて $n = 2k + 1$ と表すことができる. このとき、

$$n^2 = (2k + 1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 4(k^2 + k) + 1.$$

したがって、 n^2 を 4 で割った余りは 1 である. \square

このように証明することで、「任意の奇数 n について、 n^2 を 4 で割った余りは 1 である」という命題が真であることが示され、したがってこの命題の主張は「疑いようのない真実」であることがわかる.

証明は一つの命題にいくつか存在する場合がほとんどであり、たとえば、**Example 1.3.1** の証明は 100 通り以上も存在することが知られている. 数学の学習を進めるにあたって、様々な証明を見定めることは、論理的な思考力を養う上で非常に有益である.

¹⁸ しかし、例えば「**Example 1.1.5** において $|x| := \max\{x, -x\}$ を仮定して $|x| = \sqrt{x^2}$ を導く」など、異なる定義の同値性を示す場面では、定義が「証明すべきもの」となる. このことから、どの定義を採用しているか明確にすることが重要であることがわかる.

Example 4.0.2: 証明 (三平方の定理)

辺の長さが a と b の直角三角形を 4 つ用意する. これらの三角形を組み合わせて, 辺の長さが $a+b$ の正方形を作る. このとき, 大きな正方形の面積は $(a+b)^2$ である.

一方で, 大きな正方形は中央に辺の長さが c の小さな正方形と, 4 つの三角形で構成されている.

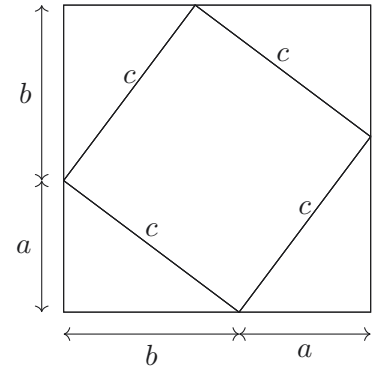
よって, 大きな正方形の面積は, 小さい正方形の面積と 4 つの三角形の面積の和に等しい. ゆえに

$$(a+b)^2 = c^2 + 4\left(\frac{1}{2}ab\right), \quad \therefore (a+b)^2 = c^2 + 2ab.$$

これにより,

$$a^2 + 2ab + b^2 = c^2 + 2ab, \quad \therefore a^2 + b^2 = c^2.$$

これが証明すべきことであった. \square

**Column I**

証明を記述する際には, 文末に \square や \blacksquare を記すことが一般的である. そのほかに “Q.E.D.”^{†1} などの表現も用いられる.

^{†1} “quod erat demonstrandum” の略で, ラテン語で「証明されるべきことでありつづけたこと」という意味である.

4.1 命題の反証と反例

数学において, 「すべての n に対して $P(n)$ が成り立つ」という全称命題が偽であることを証明するには, **反例** を一つ示すだけで十分である. これは, 全称命題が「すべての場合において成り立つ」ことを主張しているため, 一つでも例外があれば命題全体が偽となるからである.

Example 4.1.1: 反例による反証

次の命題を考える:

$$\forall n \in \mathbb{N} : \frac{n^3}{24} + 84 \geq n^2.$$

この命題が成り立たないことを示すためには, ある n について不等式が成立しないことを示せばよい. 実際に, $n = 15$ のとき,

$$\frac{15^3}{24} + 84 = \frac{3375}{24} + 84 = 140.625 + 84 = 224.625.$$

一方,

$$15^2 = 225.$$

したがって、

$$\frac{15^3}{24} + 84 = 224.625 < 225 = 15^2.$$

このように、 $n = 15$ において不等式が成り立たないため、元の命題は偽であることが分かる。

また、全称命題が偽であることを証明する際には、「反例をどう見つけたか」ということは明記しない場合が多い。たとえば **Example 4.1.1** の場合に $n = 15$ を見つけるには、微分法を用いて議論したり様々な方法があるが、そのような「反例を見つけるまでの過程」を説明する必要はなく、「 $n = 15$ の場合に命題が成り立たないこと」のみを証明として書けばよい。

4.2 様々な証明法

帰納法

たとえば数学的帰納法は、数学的な主張が自然数全体に対して成り立つことを示すための証明法である。

背理法

「 P が成り立たないと仮定すると矛盾が生じる」という論理的な構造を用いて証明を行う方法である。

直接証明

「 P が成り立つことを示す」という形式で証明を行う方法である。

以下では、「 $n \geq 2$ をみたく任意の自然数について、 $2^n > n$ である」という命題を 3 通りのやり方で証明してみよう。

Example 4.2.1: 帰納法

(I) $n = 2$ のとき、

$$2^2 = 4 > 2$$

となり、与えられた不等式は成立する。

(II) 自然数 k を $k \geq 2$ を満たすように任意にとる。 $2^k > k$ が成り立つと仮定する。このとき、

$$2^{k+1} = 2 \cdot 2^k > 2k.$$

ここで、 $k \geq 2$ であるから、 $2k - (k + 1) = k - 1 \geq 1$ であるがゆえに、 $2k > k + 1$ である。したがって、

$$2^{k+1} > 2k > k + 1.$$

ゆえに、 $n = k + 1$ のときも $2^{k+1} > k + 1$ である。

以上の考察と数学的帰納法により、 $2^n > n$ は $n \geq 2$ をみたくすべての自然数について成り立つ。 □

Example 4.2.2: 背理法

$n \geq 2$ をみたす自然数で $2^n \leq n$ となるものが存在すると仮定する. 2^n の正の約数の個数は, 指数に 1 を加えたものなので, 2^n の正の約数の個数は $n + 1$ 個以上である. しかし, 仮定より $2^n \leq n$ なので, 2^n は n 以下の数である.

これは, n 以下の数が $n + 1$ 個以上の正の約数を持つことを意味するが, これは矛盾である. したがって, 先の仮定が誤りであるため, 背理法によって $2^n > n$ が成り立つ. \square

Example 4.2.3: 直接証明

$$2^n = n \int_1^2 x^{n-1} dx + 1$$

となることはよい. さて, $x \in [1, 2]$ かつ $n \geq 2$ なので,

$$x^{n-1} \geq x^1 \geq 1$$

が成り立つ. したがって,

$$\begin{aligned} 2^n &= n \int_1^2 x^{n-1} dx + 1 \\ &\geq n \int_1^2 dx + 1 \\ &= n + 1. \end{aligned}$$

これと $n + 1 > n$ であることを併せると, $n \geq 2$ のとき $2^n > n$ である. \square

5 集合の定義と表記法

5.1 集合の定義

現代数学の基礎をなす概念に「集合」や「写像」がある。まず「集合」からみていこう。

Definition 5.1.1: 集合

ものあつまりを**集合**という^{†1}。集合を構成するものを**元**または**要素**といい、集合 A の元が a であることを $a \in A$, $A \ni a$ などと表す。

^{†1} 公理的集合論の立場では、集合とは「無定義語」であるが、ここで詳しくは触れない。

集合に関して、いくつか注意点を挙げよう。

- 集合では書き並べる順序が重要でないため、例えば $\{1, 2, 3\} = \{3, 2, 1\}$ である。
- 同じ要素が重複して含まれていても、1つの要素として扱われるため、例えば $\{1, 1, 2, 2, 3\} = \{1, 2, 3\}$ である。
- 集合の要素には、種類が異なるものを同時に含めることができる。例えば、 $\{4, \{3\}\}$ では、4 は数であり、 $\{3\}$ は集合であるが、集合としての資格がある。

「ある集合の要素を部分的に含んでいる集合」を考えることは、数学において重要な意義を持つ。といっても、現段階で部分集合のイメージを掴むことは難しいので、まず定義を確認して、部分集合の具体的な例はのちほど紹介することにする。

Definition 5.1.2: 集合の相等

集合 A , B のすべての要素が一致しているとき、 A と B は**相等**であるといい、これを

$$A = B$$

と表す。

また、集合 A と B が相等でないとき、

$$A \neq B$$

と表す。

Column II

Definition 5.1.2 を考える意義がぴんとこない読者もいるかもしれない。だが、たとえば π , $\int_0^1 \frac{4}{1+x^2} dx$, $4 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$ は異なる表現であるが、すべて円周率を表している。このような例からわかるように、「相等」を考えることは数学的な主張を正確に表現するために重要なことなのだ。

Definition 5.1.3: 部分集合

集合 A の要素がすべて集合 B の要素でもあるとき、 A は B の**部分集合**であるといい、これを

$$A \subset B, \quad B \supset A$$

などと表す^{†1}。

^{†1} このことを $A \subseteq B$, $B \supseteq A$ とかくこともある。一般に、 $A \subset B$, $B \supset A$ と書いた場合には $A = B$ の場合を含んで意味をとる。

Definition 5.1.4: 真部分集合

集合 A の要素がすべて集合 B の要素であり、なおかつ $A \neq B$ であるとき、 A は B の**真部分集合**であるといい、これを

$$A \subsetneq B, \quad B \supsetneq A$$

などと表す。

5.2 集合の表記

数学を勉強する上で、よく使う集合には固有の記号を与える場合が多い。以下ではよく使う集合の例を挙げよう。

よく使う集合

- \mathbb{R} は実数全体の集合を表している。Real number の頭文字をとった。
- $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$ は自然数全体の集合を表している。Natural number の頭文字をとった。
- $\mathbb{C} = \{a + bi \mid a, b \in \mathbb{R}\}$ は複素数全体の集合を表している。Complex number の頭文字をとった。
- $\mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$ は整数全体の集合を表している。Z はドイツ語由来である。
- $\mathbb{Q} = \{a/b \mid a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0\}$ は有理数全体の集合を表している。「商」を表すイタリア語由来である。

数を表す集合以外にも、固有の表記が与えられている集合が存在する。

- \emptyset ^{†1}は要素を一つも持たない集合、すなわち**空集合**を表している。
- $\mathcal{P}(A)$ は集合 A のすべての部分集合からなる集合、すなわち**べき集合**を表している。

^{†1} 空集合は \emptyset と表記することもある。ギリシャ文字の ϕ で代用されることもあるが、本来の空集合の記号はノルウェー語由来である。

Example 5.2.1

$$x \in \mathbb{Q}$$

と書くことで、 x は有理数であることを表す。

Example 5.2.2

$$\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$$

である。つまり、実数全体の集合は複素数全体の集合の部分集合である。

Example 5.2.3

A を集合とすると、

$$\emptyset \subset A$$

である。つまり、空集合は全ての集合の部分集合である。

Example 5.2.4: べき集合

$A = \{1, 2\}$ とすると、

$$\mathcal{P}(A) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\}$$

である。

集合の表記は文脈により省略されることがある。たとえば、以下のような問題があったとする。

2次方程式

$$x^2 - 3x - 4 = 0$$

を解け。

x が属する全体集合は定められていないが、この場合だと「 $x \in \mathbb{C}$ 」とされることが多い。よってこの方程

式の解は $x = -1, 4$ とする場合が多い。だが、もちろん $x \in \mathbb{N}$ とするなら、 $-1 \notin \mathbb{N}$ なので、この場合の解は $x = 4$ のみである。ただ、 x が属する全体集合は、文脈でわかったり明記されている場合が多いので、あまり心配はいらないと筆者は考える。

また、集合はしばしば条件を用いて記述される。

外延的記法（列挙形式）

$\{a, b, c\}$ のように要素を列挙して表す。

内包的記法（条件形式）

$\{x \in \mathbb{N} \mid x \leq 5\}$ のように条件を用いて表す。

Example 5.2.5: 集合の表記

$$\{1, 2, 3\} = \{n \in \mathbb{N} \mid n^2 - 4n + 3 \leq 0\}$$

6 集合の演算

6.1 共通部分・和集合・差集合・補集合

集合に対して、以下のような演算を定義することができる。

Definition 6.1.1: 共通部分・和集合・差集合・補集合

A と B を集合とするとき、以下の定義をする。

共通部分

A と B の両方に属する要素全体の集合を $A \cap B$ と表す。これを “ A intersection B ” と読む。

和集合

A または B のいずれかに属する要素全体の集合を $A \cup B$ と表す。これを “ A union B ” と読む。

差集合

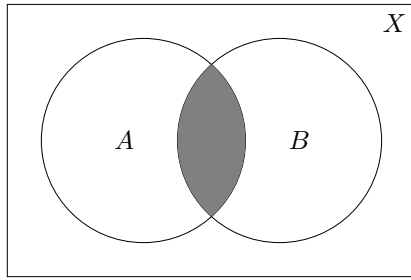
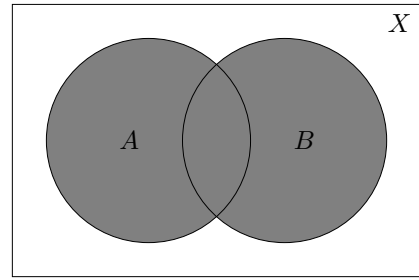
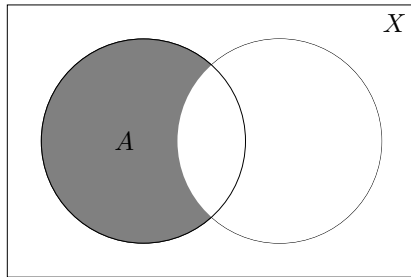
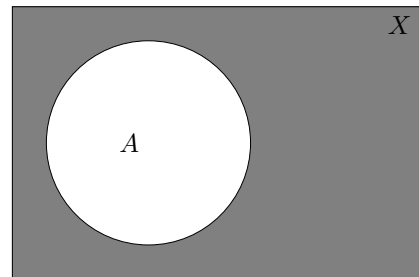
A の要素で B に属さないもの全体の集合を $A \setminus B$ と表す。

補集合

全体集合 X に対して、 $X \setminus A$ は A の補集合であり、 A^c と表す。これを “ A complement” と読む。

Example 6.1.2: 集合

例えば、 $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{3, 4, 5\}$ とすると、
 • $A \cap B = \{3\}$ • $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$
 • $A \setminus B = \{1, 2\}$ • $X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ とすると、 $A^c = \{4, 5\}$

図1 $A \cap B$ のベン図図2 $A \cup B$ のベン図図3 $A \setminus B$ のベン図図4 A^c のベン図**Proposition 6.1.3: 集合の交換法則**

A, B を集合とするととき,

$$A \cap B = B \cap A, \quad A \cup B = B \cup A$$

である.

証明.

共通部分および和集合の定義から従う. \square

Column III

ここで「なぜ交換法則を考えるのか」という疑問が生じるかもしれない。当たり前になり立つことだと思える読者もいるかもしれないが、よく考えてみると「実数の減法」や「関数（写像）の合成」、「行列の積」など、数学において一般に交換法則が成り立たないものは数多く存在する。集合に対して交換法則を考える意義はそこにあるのである。

6.2 集合の分配律**Proposition 6.2.1: 集合の分配律**

A, B, C を集合とするととき,

$$\begin{aligned} A \cap (B \cup C) &= (A \cap B) \cup (A \cap C), \\ A \cup (B \cap C) &= (A \cup B) \cap (A \cup C). \end{aligned}$$

証明.

まず,

$$A \cap (B \cup C) \subset (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

を示す:

$x \in A \cap (B \cup C)$ とすると, x は A に属し, かつ $B \cup C$ に属する. すると $x \in B \cup C$ なので, $x \in B$ または $x \in C$ のいずれかが成り立つ.

- もし $x \in B$ であれば, x は A に属し B にも属するので, $x \in A \cap B$ となる. よって $x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$ が従う.
- もし $x \in C$ であれば, x は A に属し C にも属するので, $x \in A \cap C$ となる. よって $x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$ が従う.

いずれの場合でも $x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$ となるので,

$$A \cap (B \cup C) \subset (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

が示された.

次に,

$$(A \cap B) \cup (A \cap C) \subset A \cap (B \cup C)$$

を示す:

$x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$ とすると, $x \in A \cap B$ または $x \in A \cap C$ のいずれかが成り立つ.

- もし $x \in A \cap B$ であれば, x は A に属し, かつ B に属する. すると $B \subset B \cup C$ だから $x \in B \cup C$ でもある. よって $x \in A \cap (B \cup C)$ が成り立つ.
- もし $x \in A \cap C$ であれば, x は A に属し, かつ C に属する. すると $C \subset B \cup C$ だから $x \in B \cup C$ でもある. よって $x \in A \cap (B \cup C)$ が成り立つ.

いずれの場合でも $x \in A \cap (B \cup C)$ となるので,

$$(A \cap B) \cup (A \cap C) \subset A \cap (B \cup C)$$

が示された.

以上の2つの包含関係から,

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

が成り立つ. \square

執筆中: ここに諸定理を追加予定

写像

7 写像の定義と例

7.1 写像の定義

いままでの数学の学習の過程で「関数」という言葉に出会ったことがある読者もいるかもしれない。そのような経験がある読者は「関数」と言われると、どのようなものが思い浮かぶであろうか。

関数の一般的な表現として「写像」がある¹⁹。厳密な写像の定義はのちに述べるとして、まず簡潔な定義を提示しよう。

Definition 7.1.1: 写像

集合 A から集合 B への**写像** f とは、任意の $a \in A$ に対して、 $b \in B$ をただひとつ対応させる規則のことである。

このとき、 A を f の**始集合**、 B を f の**終集合** とよぶ。

これを次のように表す：

$$f: A \rightarrow B.$$

この写像 f によって、 $a \in A$ が $b \in B$ に対応するとき、

$$b = f(a)$$

または

$$f: a \mapsto b$$

とかく¹¹。

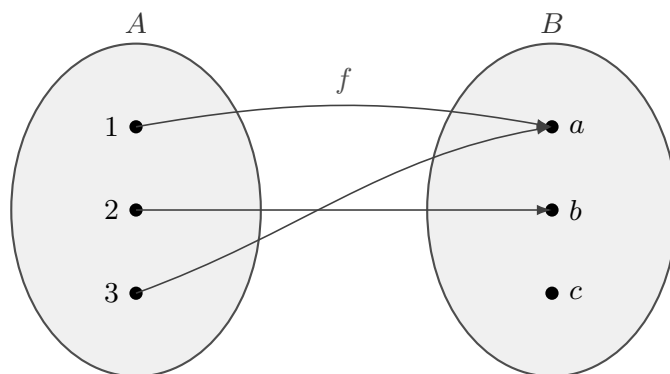
¹¹ これを $f: A \ni a \mapsto b \in B$ とかくときもある。

$A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{a, b, c\}$ とする。 $f(1) = a$, $f(2) = b$, $f(3) = a$ とすると、この写像 f は下図のように表現できる。

この例では、1 と 3 がともに a に対応しているが、上記の写像の定義ではこのような場合があってもよい。また、 A のどの元にも対応しない元 c の存在も許容される。

学習が進むと、「任意の $a_1, a_2 \in A$ に対して、 $a_1 \neq a_2$ ならば $f(a_1) \neq f(a_2)$ である写像」や「任意の $b \in B$ に対して、ある $a \in A$ が存在して、 $b = f(a)$ となる写像」を考える場合もあるが、この説明はもう少しあとにしよう。

¹⁹ 写像の始集合・終集合が \mathbb{R} など「数」の集合であるときに「関数」と呼ぶことが多い。

図5 写像 $f: A \rightarrow B$

7.2 写像の例

ここでは直感的な理解を深めるために、具体例を挙げてみよう。

Example 7.2.1: 自動販売機

自動販売機には複数のボタンがあり、それぞれが特定の飲み物に対応している^{†1}。

集合 A を自動販売機のボタンの集合，集合 B を提供される飲み物の集合としよう。各ボタン $a \in A$ に対して，そのボタンを押すと出てくる飲み物を $b \in B$ とする。

このとき，

$$b = f(a)$$

とかくと， f は写像の定義を満たす。

^{†1} ボタンをひとつ押しただけで何種類も飲み物が出てくる自動販売機はまずないであろう。少なくとも筆者は知らない。

7.3 像と値域, 逆像

Definition 7.3.1: 像と値域

写像 $f: A \rightarrow B$ において，集合 A の部分集合 $A' \subset A$ に対して，

$$f(A') = \{f(a) \mid a \in A'\}$$

で定義される集合を， f による A' の像という。

特に，定義域 A 全体の像

$$f(A) = \{f(a) \mid a \in A\}$$

を，写像 f の値域という。

Definition 7.3.2: 逆像

写像 $f: A \rightarrow B$ と集合 $B' \subset B$ に対して、 B' の**逆像**とは、

$$f^{-1}(B') = \{a \in A \mid f(a) \in B'\}$$

で定義される集合である.

Column IV

Definition 7.3.2 で定義した逆像は「写像」ではなく、あくまで「集合」であることに注意したい。逆像と紛らわしい単語に「逆写像」があるが、逆写像は f が全単射であるときに定義される写像である。その一方で、逆像は f が全単射でなくても定義される。

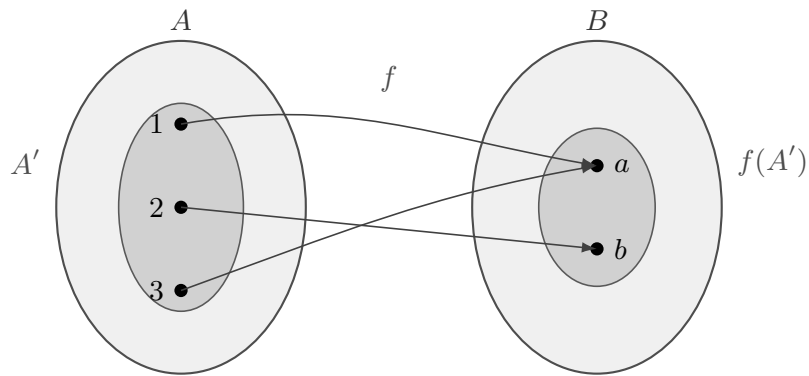


図6 像

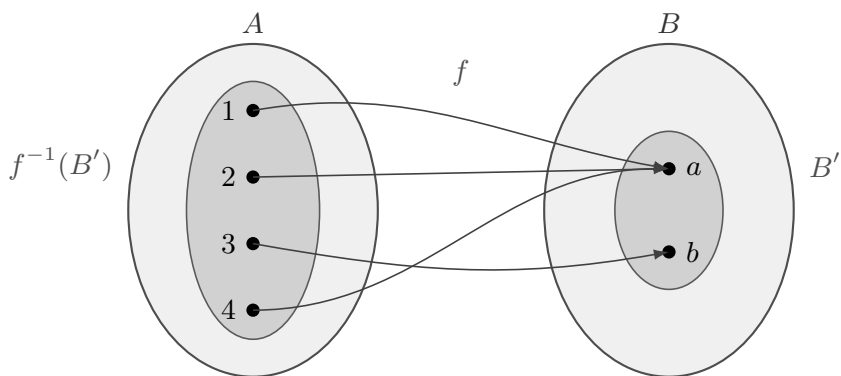


図7 逆像

7.4 単射

Definition 7.4.1: 単射

写像 f が A から B への単射であるとは、異なる要素 $a_1, a_2 \in A$ に対して、 $f(a_1) \neq f(a_2)$ が成り立つことである^{†1}.

^{†1} この定義は、対偶を考えると「 $f(a_1) = f(a_2)$ ならば $a_1 = a_2$ が成り立つ」とも言い換えられる。

集合 $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{a, b, c, d\}$ を考え、写像 f を以下のように定義する。

$$f(1) = a, \quad f(2) = b, \quad f(3) = c.$$

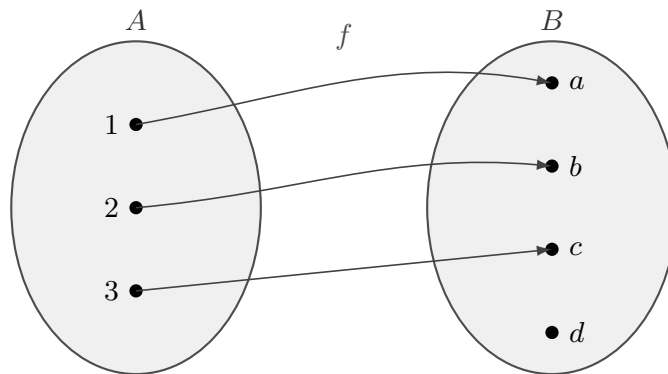


図8 単射の例

この f は単射だが、全射でない。

Example 7.4.2: 電話番号と電話機

現代では、各電話番号は特定の電話機に対応している。この対応関係を写像として考えてみよう。

集合 A を電話番号の集合、集合 B を実際の電話機の集合とする。また、電話番号 $a \in A$ に対して、 f という規則で対応する電話機を $b \in B$ とする。

このとき、

$$b = f(a)$$

とかくと、 f は写像の定義を満たす。

また、現代では各電話番号が唯一の電話機に割り当てられることが多いため、異なる電話番号が同じ電話機を指し示すことはない。

例えば、 $A = \{090-1234-5678, 080-9876-5432, 070-1111-2222\}$, $B = \{\text{Phone1}, \text{Phone2}, \text{Phone3}\}$ とし、写像 f を次のように定義する。

$$f(090-1234-5678) = \text{Phone1}, \quad f(080-9876-5432) = \text{Phone2}, \quad f(070-1111-2222) = \text{Phone3}.$$

このとき、 f は単射である。

7.5 全射

Definition 7.5.1: 全射

写像 f が A から B への全射であるとは、任意の $b \in B$ に対して、ある $a \in A$ が存在して、 $f(a) = b$ が成り立つことである。

集合 $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{a, b\}$ を考え、写像 f を以下のように定義する。

$$f(1) = a, \quad f(2) = a, \quad f(3) = b.$$

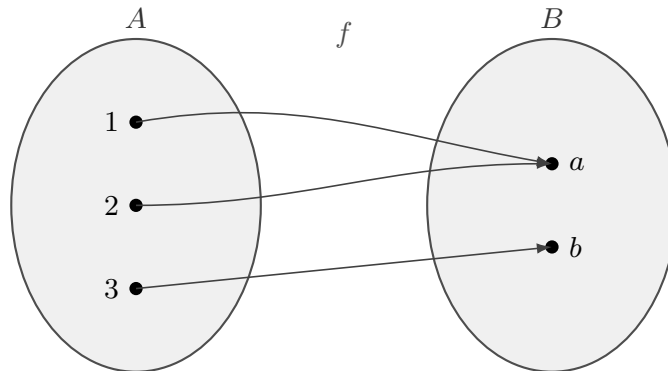


図9 全射の例

この f は全射だが、単射でない。

Example 7.5.2: 分類コードと本

公共図書館では、各本に分類コードが割り当てられており、本を分類している。この対応関係を写像として考えてみよう。

集合 A を図書館にある本の集合、集合 B を使用されている分類コードの集合とする。また、本 $a \in A$ に対して、分類コード $b \in B$ を割り当てる規則 f を定める。

このとき、

$$b = f(a)$$

と書くと、 f は写像の定義を満たす。

図書館では、複数の本が同じ分類コードを持つことが一般的である、つまり、異なる本が同じ分類コードに対応することがある。

例えば、 $A = \{\text{『数学入門』}, \text{『微分積分』}, \text{『物理学基礎』}, \text{『統計学』}\}$, $B = \{410, 420, 350\}$ とし、写像 f を次のように定義する。

$$f(\text{『数学入門』}) = 410, \quad f(\text{『微分積分』}) = 410, \quad f(\text{『物理学基礎』}) = 420, \quad f(\text{『統計学』}) = 350.$$

このとき、 f は全射である。なぜなら、 B の要素である 410, 420, 350 は全て A の要素によってカバーされているからである。しかし、 f は単射ではない。なぜなら、『数学入門』と『微分積分』がともに 410 に対応しており、異なる本が同じ分類コードに対応しているからである。

7.6 全単射

Definition 7.6.1: 全単射

写像 f が A から B への全単射であるとは、 f が単射かつ全射となることである。

集合 $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{a, b, c\}$ を考え、写像 f を以下のように定義する。

$$f(1) = c, \quad f(2) = b, \quad f(3) = a.$$

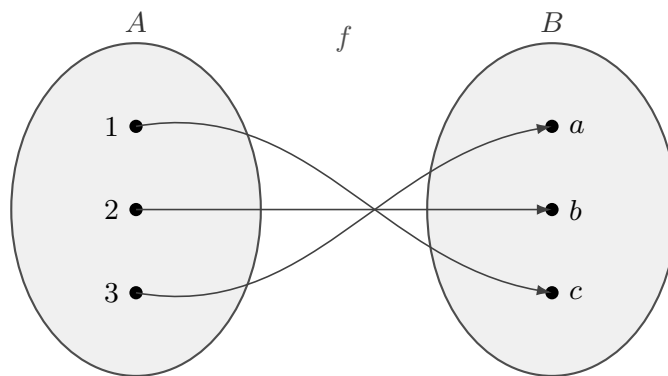


図 10 全単射の例

この f は単射かつ全射，すなわち全単射である。

Example 7.6.2: 学籍番号と学生

あるクラスの学生とその学籍番号の対応を考える。集合 A を学生の集合，集合 B を学籍番号の集合とする。ここでは、

$$A = \{\text{Alice}, \text{Bob}, \text{Charlie}\}, \quad B = \{2024001, 2024002, 2024003\}.$$

とする。

そして、学生 $a \in A$ に対して学籍番号 $b \in B$ を一意的に割り当てる規則 f を次のように定義する。

$$f(\text{Alice}) = 2024001, \quad f(\text{Bob}) = 2024002, \quad f(\text{Charlie}) = 2024003.$$

この写像 f は f は単射かつ全射，すなわち全単射である。

Example 7.6.3: 単射・全射・全単射

(A)

$$f: [0, \infty) \ni x \mapsto x^2 \in \mathbb{R}$$

は単射であるが全射でない。

(B)

$$g: \mathbb{R} \ni x \mapsto x^3 - 3x^2 - 9 \in \mathbb{R}$$

は全射であるが単射でない。

(C)

$$h: \mathbb{R} \ni x \mapsto 2 \sin x \in \mathbb{R}$$

は全射でも単射でもない。しかし、

$$h': [-\pi/2, \pi/2] \ni x \mapsto 2 \sin x \in [-2, 2]$$

は全単射である。

[1], [2], [3] を参考にした.

5 参考文献

- [1] 中島 匠一. 集合・写像・論理: 数学の基本を学ぶ. 共立出版, 2012, p. 240.
- [2] 金子 晃. 数理基礎論講義: 論理・集合・位相 (ライブラリ数理・情報系の数学講義 1). サイエンス社, 2010, p. 263.
- [3] 新井 敏康. 基幹講座 数学 集合・論理と位相. 東京図書, 2016, p. 256.

6 索引

あ

一意性	11
嬉しい	13
おさえる	14

か

外延的記法	24
含意	15
関数	27
簡単のため	13
帰納法	19
逆像	29
共通部分	24
空集合	23
系	7
元	21

さ

差集合	24
始集合	27
従う	13
写像	27
集合	21
終集合	27
述語	16
述語論理	16
証明	17
真部分集合	22
すべての	12
全射	30
全称命題	16
全称量化	16
全単射	32
像	28
相等	21
存在	9
存在命題	17
存在量化	16

た

単射	29
値域	28
直接証明	19
定義	2
定理	6
同値	15
特徴づけ	14

な

内包的記法	24
二値論理	4
任意の	12

は

背理法	19
否定	15
評価	14
部分集合	22
べき集合	23
補集合	24
補題	7

ま

命題	4
命題論理	15

や

要素	21
----	----

ら

量子化	16
論理積	15
論理和	15

わ

和集合	24
-----	----