微積分のノート

Namachan

2026 年 6 月 7 日

目次

I 数 2

1 実数 2

1.1 数の種類 (p.2) 1.2 実数の順序構造 (p.3)

II 極限 11

2 実数列の極限 11

2.1 実数列の性質 (p.11) 2.2 実数列と極限の性質 (p.12)

III 実数の連続性 19

3 実数の連続性 19

3.1 「実数の連続性」の公理 (p.19) 3.2 単調収束定理 (p.20) 3.3 アルキメデスの原理 (p.21)

参考文献 23

索引 24

第 I 章

数

概要

解析学を学習するにあたって，日本の大学の講義においてはまず，「数列の極限」を定義し直すことから始めることが多い．大学で学ぶ「実数列の収束」の定義は以下のようなものである：

実数列 $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ が $a \in \mathbb{R}$ に収束するとは，次が成り立つことである：

任意の $\varepsilon > 0$ に対して，ある $n_0 \in \mathbb{N}$ が存在し，すべての $n \in \mathbb{N}$ に対して $n \geqq n_0$ ならば

$$|a_n - a| < \varepsilon$$

が成立する．

この定義は，いわゆる ε–N 論法と呼ばれるものであり，高校で学んだ「数列がある値に限りなく近づく」という直感的な説明を厳密に表現したものである．まず，このような数列の極限の定義を学ぶことを前提に，「数」についていくつかの用語を定義することからはじめてみよう．

1　実数

1.1　数の種類

まず，高校で学んできた「数」を振り返ってみよう．

数の集合

自然数（natural numbers）	$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$
整数（integers）	$\mathbb{Z} = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$
有理数（rational numbers）	$\mathbb{Q} = \left\{ \dfrac{a}{b} \,\middle|\, a \in \mathbb{Z},\ b \in \mathbb{N} \right\}$
実数（real numbers）	$\mathbb{R}$
複素数（complex numbers）	$\mathbb{C} = \{a + bi \mid a, b \in \mathbb{R},\ i^2 = -1\}$

高校まではあまりなかった視点かもしれないが，これから少し筆者の考察に付き合ってほしい．$n, m \in \mathbb{N}$ とすると $m + n \in \mathbb{N}$，$mn \in \mathbb{N}$ である．大学で学ぶ言葉を使うと，このことは「$\mathbb{N}$ は加法と乗法に関して閉じている」という[†1]．しかし $n - m$ や $n \div m$ は $\mathbb{N}$ に属さない場合がある（たとえば $2 - 3$ や $2 \div 3$）．

このことから，我々は自然数を拡張して整数，さらに有理数を導入した．実際，任意の $a, b \in \mathbb{Q}$ に対して $a + b \in \mathbb{Q}$，$a - b \in \mathbb{Q}$，$a \cdot b \in \mathbb{Q}$，$a \div b \in \mathbb{Q}$ $(b \neq 0)$ が成り立つ．このように，有理数は加法，減法，乗法，除法に関して閉じている．

しかし，$\mathbb{Q}$ にも属さない数がある．たとえば $\sqrt{2}$ は有理数に属さない．さらに数列

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

[†1] 「閉じている」とは，ある集合に対して，その集合の要素同士で演算を行ったときに，結果もその集合の要素になることを指す．

を考えると，各 $n \in \mathbb{N}$ で $a_n \in \mathbb{Q}$ であるにもかかわらず，

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$$

となり，極限として無理数が現れる．つまり，有理数列の極限が無理数になる場合もあるのである．

これらをふまえ，実数体 $\mathbb{R}$ を考えるにあたって，空でない部分集合 $A \subset \mathbb{R}$ が上に有界であるならば，A の上限 $\sup A$ が $\mathbb{R}$ に存在することを，**実数の連続性の公理**として認めることにする[†2]．

さらに我々は $i=\sqrt{-1}$ を満たす数 i を導入し，複素数体 $\mathbb{C}$ を構成する．このようにして，自然数 $\mathbb{N}$，整数 $\mathbb{Z}$，有理数 $\mathbb{Q}$，実数 $\mathbb{R}$，複素数 $\mathbb{C}$ という数の体系が構築される．

これらを踏まえた上で，厳密に「数」に関する議論を進めていきたいが，そのためにはいくつかの用語を定義する必要がある．そこでまずは「慣れ親しんだ集合」として，$\mathbb{R}$ の部分集合 A を中心に議論を進めていこう．

1.2 実数の順序構造

Proposition 1.2.1: 実数の稠密性

任意の $a,b \in \mathbb{R}$ に対して，$a<b$ ならば

$$a<c<b$$

をみたす $c \in \mathbb{R}$ が存在する．

証明.

$c=(a+b)/2$ とおけば，これは $a<c<b$ を満たす． □

命題 **Proposition 1.2.1** の証明では，やや天下り的に「$c=(a+b)/2$ とおけばよい」と書いた．我々は，理由をいっさい述べることなくこのような数をとることにした．しかし，このように c を選ぶと都合がいいことは，数直線上で a と b のちょうど真ん中にある数を選んでいると考えれば自ずと理解できる．

もちろん，c の選び方は一通りではない．たとえば，a と b の対数平均を考えて，

$$c=\frac{b-a}{\log b-\log a}$$

とおいても，$a<c<b$ が成り立つ．また，証明において重要なのは，条件を満たす c が少なくとも 1 つ存在することを示すことであり，その c をどのように発見したかまで説明する必要はない．

Proposition 1.2.2: 任意の正数より小さい非負実数

$a \geqq 0$ とする．任意の $\varepsilon>0$ に対して $a<\varepsilon$ が成り立つならば，$a=0$ である．

証明.

背理法で示す．$a \neq 0$ と仮定する．$a \geqq 0$ であるから，このとき $a>0$ である．

命題 **Proposition 1.2.1** より，$0<\varepsilon<a$ をみたす $\varepsilon \in \mathbb{R}$ が存在する．特に $\varepsilon>0$ であるが，仮定より $a<\varepsilon$ でなければならない．これは $\varepsilon<a$ に矛盾する．

[†2] 同様に，空でない部分集合 $A \subset \mathbb{R}$ が下に有界であるならば，A の下限 $\inf A$ も $\mathbb{R}$ に存在する．

したがって，$a = 0$ である．　□

Definition 1.2.3: 最大元・最小元

$A \subset \mathbb{R}$ とする．
$m \in \mathbb{R}$ が

$$\begin{cases} (1)\ m \in A, \\ (2)\ \forall x \in A,\ x \leqq m \end{cases}$$

を満たすとき，m を A の**最大元**といい，

$$m = \max A$$

とかく．
$m \in \mathbb{R}$ が

$$\begin{cases} (1)\ m \in A, \\ (2)\ \forall x \in A,\ m \leqq x \end{cases}$$

を満たすとき，m を A の**最小元**といい，

$$m = \min A$$

とかく．

Example 1.2.4: 最大元・最小元の例

集合 $A = \{x \mid x \in \mathbb{R}, 0 < x \leqq 1\}$ に対して，$\max A = 1$，$\min A$ は存在しない．集合 $B = \{x \mid x \in \mathbb{R}, 0 \leqq x < 1\}$ に対して，$\min B = 0$，$\max B$ は存在しない．

Proposition 1.2.5: 最大元・最小元の一意性

任意の集合 A に対し，その最大元・最小元は存在するとすればただひとつである．

証明.
m, m' がともに集合 A の最大元であると仮定する．最大元の定義より，

$$m = \max A \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} (1)\ m \in A, \\ (2)\ \forall x \in A,\ x \leqq m \end{cases}$$

であり，同様に

$$m' = \max A \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} (1)\ m' \in A, \\ (2)\ \forall x \in A,\ x \leqq m' \end{cases}$$

である．

m は A の最大元であり，$m' \in A$ であるから，

$$m' \leqq m$$

が成り立つ．また，m' は A の最大元であり，$m \in A$ であるから，

$$m \leqq m'$$

が成り立つ．したがって，$m = m'$ である．

同様にして，最小元についても一意性が示される．　$\square$

ここで，$[0, 1)$ のような最大元のない集合にも，最大元に似た概念を与えたい．そのためにまず上界・下界を定義する．

Definition 1.2.6: 上界・下界

$A \subset \mathbb{R}$ とする．

$a \in \mathbb{R}$ が

$$\forall x \in A,\ x \leqq a$$

を満たすとき，a を A の**上界**という．また，A の上界全体の集合を $U(A)$ とかく．すなわち，

$$U(A) = \{a \in \mathbb{R} \mid \forall x \in A,\ x \leqq a\}$$

である．

$a \in \mathbb{R}$ が

$$\forall x \in A,\ a \leqq x$$

を満たすとき，a を A の**下界**という．また，A の下界全体の集合を $L(A)$ とかく．すなわち，

$$L(A) = \{a \in \mathbb{R} \mid \forall x \in A,\ a \leqq x\}$$

である．

Definition 1.2.6 は難解に思えるかもしれない．言わんとしていることは「$U(A)$ は，A の中のどの要素よりも大きいかもしくは等しい数全体の集合」ということである．

具体例で説明しよう．

Example 1.2.7: 上界・下界の例

集合

$$A = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < 1\}$$

について，

$$U(A) = [1, \infty), \quad L(A) = (-\infty, 0]$$

である．

Definition 1.2.8: 有界

$A \subset \mathbb{R}$ とする．

$$A \text{ が上に有界} \quad \Longleftrightarrow \quad U(A) \neq \varnothing$$

である．また，

$$A \text{ が下に有界} \quad \Longleftrightarrow \quad L(A) \neq \varnothing$$

である．

A が上にも下にも有界であるとき，すなわち

$$U(A) \neq \varnothing \quad \text{かつ} \quad L(A) \neq \varnothing$$

が成り立つとき，A は**有界**であるという．

Example 1.2.9: 有界な集合

集合

$$A = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 1\}$$

は下に有界であるが，上に有界ではない．

一方，集合

$$B = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 < x < 4\}$$

は上にも下にも有界である．したがって，B は有界である．

Definition 1.2.10: 上限と下限

A を $\mathbb{R}$ の空でない部分集合とする．

A が上に有界であるとき，

$$\sup A = \min U(A)$$

と定める．このとき，$\sup A$ を A の**最小上界**または**上限**という．

また，A が下に有界であるとき，

$$\inf A = \max L(A)$$

と定める．このとき，$\inf A$ を A の**最大下界**または**下限**という．

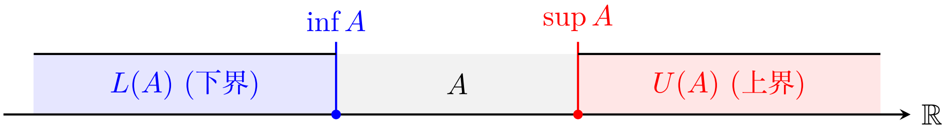

図 1　上限・下限と上界・下界のイメージ

Theorem 1.2.11: 上限・下限の判定条件

A を $\mathbb{R}$ の空でない部分集合とする．
A が上に有界であるとき，$m \in \mathbb{R}$ について

$$m = \sup A \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} (1)\ \forall x \in A,\ x \leqq m, \\ (2)\ a < m \text{ ならば } \exists x \in A,\ a < x \end{cases}$$

が成り立つ．
また，A が下に有界であるとき，$m \in \mathbb{R}$ について

$$m = \inf A \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} (1)\ \forall x \in A,\ m \leqq x, \\ (2)\ m < a \text{ ならば } \exists x \in A,\ x < a \end{cases}$$

が成り立つ．

証明.
まず，上限の場合を示す．A の上界全体の集合を $U(A)$ とする．上限の定義より，

$$m = \sup A \quad \Longleftrightarrow \quad m = \min U(A)$$

である．
さらに，最小元の定義より，

$$m = \min U(A) \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} (1)\ m \in U(A), \\ (2)\ \forall a \in U(A),\ m \leqq a \end{cases}$$

である．ここで，(2) の対偶をとると，

$$\forall a \in U(A),\ m \leqq a \quad \Longleftrightarrow \quad a < m \text{ ならば } a \notin U(A)$$

である．したがって，

$$m = \sup A \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} (1)\ m \in U(A), \\ (2)\ a < m \text{ ならば } a \notin U(A) \end{cases}$$

となる．
最後に，上界の定義より，

$$m \in U(A) \quad \Longleftrightarrow \quad \forall x \in A,\ x \leqq m$$

であり，また

$$a \notin U(A) \quad \Longleftrightarrow \quad \exists x \in A,\ a < x$$

である．ゆえに，

$$m = \sup A \iff \begin{cases} (1)\ \forall x \in A,\ x \leqq m, \\ (2)\ a < m \text{ ならば } \exists x \in A,\ a < x \end{cases}$$

が成り立つ．

下限の場合も同様である．A の下界全体の集合を $L(A)$ とすると，

$$m = \inf A \iff m = \max L(A)$$

である．最大元の定義より，

$$m = \max L(A) \iff \begin{cases} (1)\ m \in L(A), \\ (2)\ \forall a \in L(A),\ a \leqq m \end{cases}$$

である．(2) の対偶をとると，

$$\forall a \in L(A),\ a \leqq m \iff m < a \text{ ならば } a \notin L(A)$$

である．

ここで，下界の定義より，

$$m \in L(A) \iff \forall x \in A,\ m \leqq x$$

であり，また

$$a \notin L(A) \iff \exists x \in A,\ x < a$$

である．したがって，

$$m = \inf A \iff \begin{cases} (1)\ \forall x \in A,\ m \leqq x, \\ (2)\ m < a \text{ ならば } \exists x \in A,\ x < a \end{cases}$$

が成り立つ．　□

Theorem 1.2.12: ε を用いた特徴づけ

A を $\mathbb{R}$ の空でない部分集合とする．

A が上に有界であるとき，$m \in \mathbb{R}$ について

$$m = \sup A \iff \begin{cases} (1)\ \forall x \in A,\ x \leqq m, \\ (2)\ \forall \varepsilon > 0,\ \exists a \in A,\ m - \varepsilon < a \end{cases}$$

が成り立つ．

また，A が下に有界であるとき，$m \in \mathbb{R}$ について

$$m = \inf A \iff \begin{cases} (1)\ \forall x \in A,\ m \leqq x, \\ (2)\ \forall \varepsilon > 0,\ \exists a \in A,\ a < m + \varepsilon \end{cases}$$

が成り立つ．

Example 1.2.13: 集合 $A=[0,1)$ の上限・下限

集合 $A:=[0,1)$ の上限 $\sup A$ と下限 $\inf A$ を，本節で導入した 3 通りの視点から導く．

(1) 上界集合 $U(A)$・下界集合 $L(A)$ による定義（定義 Definition 1.2.6，Definition 1.2.10）に基づく導出

上限 $\sup A$： まず上界集合 $U(A)$ を特定する．任意の $a\in A$ に対して $a<1$ であるから，1 は A の上界である．よって $1\in U(A)$ となる．次に $x<1$ とすると，$a:=(x+1)/2$ とおけば $x<a<1$ より $a\in A$ かつ $a>x$ となるため，x は上界ではない．これより $U(A)=[1,\infty)$ であり，その最小元（定義 **Definition 1.2.3**）が上限であるから，$\sup A=\min U(A)=1$ を得る．

下限 $\inf A$： 同様に下界集合 $L(A)$ を特定する．任意の $a\in A$ に対して $a\geqq 0$ であるから，0 は A の下界である．よって $0\in L(A)$ となる．次に $y>0$ とすると，$a:=y/2$ とおけば $0\leqq a<y$ より $a\in A$ かつ $a<y$ となるため，y は下界ではない．これより $L(A)=(-\infty,0]$ であり，その最大元が下限であるから，$\inf A=\max L(A)=0$ である．

(2) 「上限・下限の判定条件」（定理 Theorem 1.2.11）による証明

上限 $\sup A$： $m=1$ とおく．

- **上界の条件**：任意の $a\in A=[0,1)$ に対して $a<1\leqq 1$ より成り立つ．
- **最小性**：$x<1$ とすると，$a:=(x+1)/2$ は $x<a<1$ を満たし，$a\in A$ かつ $x<a$ となる要素が存在する．

よって，定理 **Theorem 1.2.11** より $1=\sup A$ である．

下限 $\inf A$： $m=0$ とおく．

- **下界の条件**：任意の $a\in A=[0,1)$ に対して $a\geqq 0$ より成り立つ．
- **最大性**：$x>0$ とすると，$a:=x/2$ は $0\leqq a<x$ を満たし，$a\in A$ かつ $x>a$ となる要素が存在する．

よって，定理 **Theorem 1.2.11** より $0=\inf A$ である．

(3) 「ε を用いた特徴づけ」（定理 Theorem 1.2.12）による証明

上限 $\sup A$： $m=1$ とおく．

(1) 任意の $a\in A$ に対して $a\leqq 1$ である（上界の性質）．

(2) 任意の $\varepsilon>0$ に対して，$a\in A$ を以下のように選ぶ：

$$a:=\begin{cases}1-\dfrac{\varepsilon}{2} & (0<\varepsilon\leqq 1)\\ 0 & (\varepsilon>1)\end{cases}$$

このとき $a\in[0,1)$ であり，いずれの場合も $1-\varepsilon<a$ が成り立つ．

よって，定理 **Theorem 1.2.12** より $\sup A=1$ である．

下限 $\inf A$： $m=0$ とおく．

(3) 任意の $a\in A$ に対して $a\geqq 0$ である（下界の性質）．

(4) 任意の $\varepsilon > 0$ に対して，$a \coloneqq \min\{\varepsilon/2, 1/2\}$ とおけば，$a \in A$ かつ $a < 0 + \varepsilon$ が常に成り立つ．

よって，定理 **Theorem 1.2.12** より $\inf A = 0$ である．

以上より結論として，次を得る：

$$\sup A = 1, \quad \inf A = 0.$$

第 II 章

極限

概要

解析学の学習において，高校で「数列の極限」を定義する際に用いられた「限りなく近づく」という表現は，厳密な議論を行う上では曖昧さを残すものである．本章では，この曖昧な表現を論理的に厳格な形へと再定義した ε–N 論法を導入し，実数列の収束と発散を定義する．さらに，数列を自然数から実数への「写像」として捉え直し，「極限の一意性」を証明する．また，極限操作が順序関係を保存することや，未知の数列の収束を判定する強力な手法である「はさみうちの原理」について，具体例を丁寧に確認していく．このような厳密な議論は，次章以降において「実数の連続性」を数学的に記述するために不可欠である．

2　実数列の極限

2.1　実数列の性質

高校数学において，数列の極限は次のように定義されていたはずである．

> 数列 $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ [†3]において，番号 n を限りなく大きくするとき，a_n の値がある一定の値 a に限りなく近づくならば，この数列は a に**収束する**といい，
>
> $$\lim_{n\to\infty} a_n = a$$
>
> と記す．

しかし，この「限りなく大きくする」「限りなく近づく」といった表現は直感的ではあるものの，数学的に厳密な定義とは言い難い．何をもって「限りなく」とするのか，その基準が曖昧だからである．こうした直感的な表現を排し，論理的に厳格な形で実数列[†4]の収束を再定義したものが，以下の ε–N 論法である．

Definition 2.1.1: 実数列の収束

実数列 $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ が $a \in \mathbb{R}$ に収束するとは，次が成り立つことである：
任意の $\varepsilon > 0$ に対して，ある $n_0 \in \mathbb{N}$ が存在し，すべての $n \in \mathbb{N}$ に対して $n \geqq n_0$ ならば

$$|a_n - a| < \varepsilon$$

が成立する．

この定義は，「いかに小さな誤差 ε を指定したとしても，ある番号 n_0 を境に，それ以降のすべての項 a_n

[†3] 高校数学では数列を $\{a_n\}$ と表記することが多いが，大学数学では n が自然数であることを明示するために $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ とかく．また，$\{a_n\}$ という記法は集合 $\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ と混同しやすく，たとえば $a_n := (-1)^n$ のとき，数列としては各項が振動するが，集合としては $\{-1, 1\}$ という 2 要素のみを持つ集合を指すことになる．
[†4] 各項が実数である数列のこと．

が a の ε 近傍，すなわち開区間 $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ に収まってしまう」ことを意味している．

Definition 2.1.2: 実数列の発散

実数列 $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ が収束しないとき，その数列は**発散する**という[†1]．

[†1] $a_n := (-1)^n$ のように特定の定数に近づかず，かつ無限大にも行かない「振動」も，数学的には発散に含まれる．

Definition 2.1.3: 実数列の $+\infty$ への発散

実数列 $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ が $+\infty$ に発散するとは，任意の $M\in\mathbb{R}$ に対して，ある $n_0\in\mathbb{N}$ が存在し，すべての $n\in\mathbb{N}$ に対して $n \geqq n_0$ ならば

$$a_n > M$$

が成立することである[†1]．

[†1] $-\infty$ への発散の定義については，不等号の向きに注意して各自で考えてみてほしい．

2.2　実数列と極限の性質

ここで，実数列を集合論的な観点から再定義しておく．数列とは，各自然数に対して一つの実数を割り当てる規則に他ならない．

Definition 2.2.1: 実数列

写像 $a\colon \mathbb{N}\to\mathbb{R}$ を実数列と呼ぶ．自然数 $n\in\mathbb{N}$ による像 $a(n)$ を a_n と書き，数列そのものを $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ と表記する．

Proposition 2.2.2: 実数列の極限の一意性

数列 $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ が収束するとき，その収束先（極限値）はただ一つに限る．

証明.

$a\neq b$ なる $a,b\in\mathbb{R}$ がともに数列 $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ の収束先であると仮定し，矛盾を導く．$\varepsilon := \dfrac{|b-a|}{2}$ とおくと，$a\neq b$ より $\varepsilon>0$ である．収束の定義より，ある $n_0, n_1\in\mathbb{N}$ が存在して，すべての $n\in\mathbb{N}$ に対して次が成り立つ：

$$n\geqq n_0 \implies |a_n-a|<\varepsilon, \quad n\geqq n_1 \implies |a_n-b|<\varepsilon$$

ここで $n\geqq \max\{n_0,n_1\}$ を満たす n を任意にとると，三角不等式より

$$|b-a| = |(b-a_n)+(a_n-a)| \leqq |a_n-b|+|a_n-a| < \varepsilon+\varepsilon = 2\varepsilon = |b-a|$$

となり，$|b-a|<|b-a|$ という矛盾が生じる．したがって，収束先はただ一つである．　□

Proposition 2.2.3: 収束列の有界性

収束する実数列は有界である．

証明.

実数列 $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ が $a\in\mathbb{R}$ に収束するとする．このとき，収束の定義より，$1>0$ に対して，ある $n_0\in\mathbb{N}$ が存在して，

$$n \geqq n_0 \implies |a_n - a| < 1$$

が成り立つ．したがって，$n\geqq n_0$ ならば，

$$|a_n| \leqq |a_n - a| + |a| < 1 + |a|$$

である．

また，$|a_1|, |a_2|, \ldots, |a_{n_0}|$ は有限個の実数であるから，

$$M_0 = \max\{|a_1|, |a_2|, \ldots, |a_{n_0}|\}$$

とおくことができる．

そこで，

$$M = \max\{M_0,\ 1+|a|\}$$

とおく．このとき，$n<n_0$ ならば $|a_n|\leqq M_0\leqq M$ であり，$n\geqq n_0$ ならば $|a_n|<1+|a|\leqq M$ である．

よって，すべての $n\in\mathbb{N}$ に対して

$$|a_n| \leqq M$$

が成り立つ．したがって，実数列 $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ は有界である．　□

Theorem 2.2.4: 極限の四則演算

実数列 (a_n)，(b_n) がそれぞれ $a,b\in\mathbb{R}$ に収束するとする．このとき，

$$\lim_{n\to\infty}(a_n+b_n) = a+b, \qquad \lim_{n\to\infty}(a_nb_n) = ab$$

が成り立つ．

さらに，$b\neq 0$ であり，十分大きい n に対して $b_n\neq 0$ であるとき，

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b}$$

が成り立つ．

証明.

まず，和について示す．任意の $\varepsilon > 0$ をとる．$a_n \to a$，$b_n \to b$ であるから，ある $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ が存在して，

$$n \geqq n_1 \implies |a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$$

かつ

$$n \geqq n_2 \implies |b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2}$$

が成り立つ．そこで，

$$n_0 = \max\{n_1, n_2\}$$

とおく．このとき，$n \geqq n_0$ ならば，

$$|(a_n + b_n) - (a + b)| = |(a_n - a) + (b_n - b)| \leqq |a_n - a| + |b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

である．したがって，$a_n + b_n \to a + b$ である．

次に，積について示す．収束する実数列は有界であるから，(b_n) は有界である．よって，ある $M > 0$ が存在して，すべての $n \in \mathbb{N}$ に対して

$$|b_n| \leqq M$$

が成り立つ．

任意の $\varepsilon > 0$ をとる．$a_n \to a$，$b_n \to b$ であるから，ある $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ が存在して，

$$n \geqq n_1 \implies |a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2M}$$

かつ

$$n \geqq n_2 \implies |b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2(|a| + 1)}$$

が成り立つ．ただし，$|a| + 1 > 0$ である．

そこで，

$$n_0 = \max\{n_1, n_2\}$$

とおく．このとき，$n \geqq n_0$ ならば，

$$\begin{aligned}
|a_n b_n - ab| &= |a_n b_n - a b_n + a b_n - ab| \\
&\leqq |b_n||a_n - a| + |a||b_n - b| \\
&\leqq M|a_n - a| + |a||b_n - b| \\
&< M \cdot \frac{\varepsilon}{2M} + |a| \cdot \frac{\varepsilon}{2(|a| + 1)} \\
&\leqq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon
\end{aligned}$$

である．したがって，$a_n b_n \to ab$ である．

最後に，商について示す．$b \neq 0$ とする．まず，$b_n \to b$ であるから，$\varepsilon = \dfrac{|b|}{2}$ に対して，ある $n_1 \in \mathbb{N}$ が存在して，

$$n \geqq n_1 \implies |b_n - b| < \frac{|b|}{2}$$

が成り立つ．このとき，$n \geqq n_1$ ならば，

$$|b_n| \geqq |b| - |b_n - b| > |b| - \frac{|b|}{2} = \frac{|b|}{2}$$

である．したがって，十分大きい n に対して $b_n \neq 0$ である．

任意の $\varepsilon > 0$ をとる．$a_n \to a$，$b_n \to b$ であるから，ある $n_2, n_3 \in \mathbb{N}$ が存在して，

$$n \geqq n_2 \implies |a_n - a| < \frac{|b|}{2}\varepsilon$$

かつ

$$n \geqq n_3 \implies |b_n - b| < \frac{|b|^2}{2(|a|+1)}\varepsilon$$

が成り立つ．

そこで，

$$n_0 = \max\{n_1, n_2, n_3\}$$

とおく．このとき，$n \geqq n_0$ ならば，

$$\begin{aligned}
\left|\frac{a_n}{b_n} - \frac{a}{b}\right| &= \left|\frac{b(a_n - a) - a(b_n - b)}{bb_n}\right| \\
&\leqq \frac{|b||a_n - a| + |a||b_n - b|}{|b||b_n|} \\
&< \frac{|b||a_n - a| + |a||b_n - b|}{|b| \cdot \dfrac{|b|}{2}} \\
&= \frac{2}{|b|}|a_n - a| + \frac{2|a|}{|b|^2}|b_n - b| \\
&< \frac{2}{|b|} \cdot \frac{|b|}{2} \cdot \frac{\varepsilon}{2} + \frac{2|a|}{|b|^2} \cdot \frac{|b|^2}{2(|a|+1)} \cdot \frac{\varepsilon}{2} \\
&\leqq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon
\end{aligned}$$

である．したがって，

$$\frac{a_n}{b_n} \to \frac{a}{b}$$

が成り立つ．　□

ここで，(a_n) と (b_n) がともに収束する場合に，上の定理が成り立つことに注意しよう．たとえば，

$$a_n \coloneqq n, \qquad b_n \coloneqq -n$$

とすると，数列 $(a_n + b_n)$ は 0 に収束するが，数列 (a_n) と (b_n) はともに発散する．このように，極限の四則演算は，収束する数列に対して適用されるものである．

次に，極限操作が順序関係を保存することを示す．

Theorem 2.2.5: 極限の不等式

収束する実数列 $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}, (b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ について，その極限をそれぞれ a, b とする．
すべての $n \in \mathbb{N}$ に対して $a_n \leqq b_n$ が成り立つならば，

$$a \leqq b$$

である．

証明．
背理法を用いる．$a > b$ と仮定し，$\varepsilon \coloneqq \dfrac{a-b}{2} > 0$ とおく．収束の定義より，ある $n_0 \in \mathbb{N}$ が存在して，$n \geqq n_0$ ならば

$$|a_n - a| < \varepsilon \implies a - \varepsilon < a_n < a + \varepsilon$$

$$|b_n - b| < \varepsilon \implies b - \varepsilon < b_n < b + \varepsilon$$

がともに成立する．このとき，$b + \varepsilon = b + \dfrac{a-b}{2} = \dfrac{a+b}{2}$ および $a - \varepsilon = a - \dfrac{a-b}{2} = \dfrac{a+b}{2}$ であるから，

$$b_n < b + \varepsilon = a - \varepsilon < a_n$$

となり，すべての n で $a_n \leqq b_n$ とした仮定に矛盾する．ゆえに $a \leqq b$ である．　□

注意すべき点は，元の数列の間に厳密な不等号 $a_n < b_n$ が成り立っていても，極限において不等号が維持されるとは限らないことである．例えば，$a_n \coloneqq 1 - \dfrac{1}{n}$ および $b_n \coloneqq 1 + \dfrac{1}{n}$ とすると，任意の $n \in \mathbb{N}$ において $a_n < b_n$ が成立するが，極限値はともに 1 となり，$a = b$ が成立してしまう．このように，極限操作によって不等号の「ゆとり」が消滅し，等号が成立する可能性がある．

Theorem 2.2.6: はさみうちの原理

実数列 $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}, (b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ がともに $a \in \mathbb{R}$ に収束するとする：

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a, \quad \lim_{n\to\infty} b_n = a$$

このとき，別の数列 $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ について，ある番号以上のすべての $n \in \mathbb{N}$ に対して

$$a_n \leqq c_n \leqq b_n$$

が成り立つならば，数列 $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ もまた a に収束する．すなわち，$(c_n) \in \mathcal{C}$ であり，$\lim\limits_{n\to\infty} c_n = a$ が成立する．

証明．
任意の $\varepsilon > 0$ をとる．仮定より $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ および $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = a$ であるから，この ε に対してある

$n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ が存在し，次を満たす：

$$n \geqq n_1 \implies a - \varepsilon < a_n < a + \varepsilon \tag{1}$$
$$n \geqq n_2 \implies a - \varepsilon < b_n < b + \varepsilon \tag{2}$$

ここで $n_0 := \max\{n_1, n_2\}$ と定めると，$n \geqq n_0$ においては上の 2 つの不等式が同時に成立する．さらに，仮定 $a_n \leqq c_n \leqq b_n$ を合わせると， $n \geqq n_0$ において

$$a - \varepsilon < a_n \leqq c_n \leqq b_n < a + \varepsilon \in$$

が成り立つ．したがって，$n \geqq n_0$ ならば常に

$$a - \varepsilon < c_n < a + \varepsilon \iff |c_n - a| < \varepsilon$$

が成立する．これは，数列 $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ が a に収束することの定義そのものである．　□

この原理の特筆すべき点は，数列 (c_n) 自体の収束性をあらかじめ仮定する必要がないことにある．上下から同じ値に収束する数列で「挟む」ことができれば，未知の数列 (c_n) の収束先も同じ値であると結論づけることができる．このため，はさみうちの原理は数列の収束を判定する際の強力なツールとなる．

Example 2.2.7: はさみうちの原理（三角関数の例）

$$a_n := \frac{\sin(n\pi)}{n}$$

とする．このとき，

$$-1 \leqq \sin(n\pi) \leqq 1$$

であるから，

$$-\frac{1}{n} \leqq a_n \leqq \frac{1}{n}$$

となり， $\lim\limits_{n\to\infty}(-1/n) = 0$， $\lim\limits_{n\to\infty} 1/n = 0$ であるから，はさみうちの原理により，

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0.$$

Example 2.2.8: はさみうちの原理（ガウス記号の例）

$$a_n := \frac{[\sqrt{n}]}{n}$$

とする．このとき，任意の実数 x に対して

$$[x] \leqq x < [x] + 1$$

が成り立つから，$x = \sqrt{n}$ とおくと

$$\sqrt{n} - 1 < [\sqrt{n}] \leqq \sqrt{n}$$

となる．よって両辺を n で割れば

$$\frac{\sqrt{n}-1}{n} < a_n \leqq \frac{\sqrt{n}}{n}$$

を得る．ここで

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n}-1}{n} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{n} \right) = 0, \quad \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n}}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$$

であるから，はさみうちの原理により

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0.$$

第 III 章

実数の連続性

概要

前章では，ε–N 論法を用いることで，（実）数列の収束を厳密に定義した．しかし，有理数列 $a_n = (1+1/n)^n$ が有理数の範囲に極限を持たないように，「数列の行き先」が常にその集合の中に存在するかという問題は，極限の定義とは別の議論を必要とする．そのときに取り上げられるものが，実数体を特徴づける性質である「実数の連続性」である．実数体 $\mathbb{R}$ において，数列が「隙間」に落ち込むことなく収束先を見出せるのは，我々が「実数の連続性」という強力な事実を「公理」として認めているからに他ならない．

本章ではまず，「有理数の集合には上限が存在しない場合がある」という具体例を確認し，その上で，「実数の連続性」の公理を導入し，これを用いることで「単調収束定理」「アルキメデスの原理」などの命題を証明していく．また，高校の数学でも扱った $\lim_{n\to\infty} 1/n = 0$ という直感的な事実を厳密に支える「アルキメデスの原理」が，この連続性の公理からどのように導かれるのか，その論理的な構造を明らかにしよう．

3　実数の連続性

3.1　「実数の連続性」の公理

ここで，一般にある集合 A が上に有界であっても，その上限が A の中に存在しないことの具体例を挙げよう．

Example 3.1.1

集合 $A \coloneqq \{x \mid x \in \mathbb{Q}, x > 0, x^2 < 3\}$ は上に有界であり，3 は A の上界であるが，$\sup A$ は $\mathbb{Q}$ の中には存在せず，当然 A の中にも存在しない．

ここで，A に上限が存在すると仮定して，それを s とおこう．s は A の上界であるから，$s^2 \geqq 3$ が成り立つ．

このとき，$s_0 = s - \dfrac{s^2-3}{2s}$ とおくと[†1]，

$$s_0^2 = s^2 - (s^2-3) + \frac{(s^2-3)^2}{4s^2} = 3 + \frac{(s^2-3)^2}{4s^2} > 3$$

が成り立つから，s_0 は A の上界である．

しかし，

$$s_0 - s = -\frac{s^2-3}{2s} < 0$$

であるから，$s_0 < s$ である．これは s が A の上限であることに矛盾する．ゆえに，A の上限は $\mathbb{Q}$ の中には存在せず，したがって A の中にも存在しない．

[†1] この s_0 は，$y = x^2 - 3$ の $x = s$ における接線と x 軸との交点の x 座標である．このように s_0 を定めるとうまくいく理由は，曲線が下に凸である性質を利用しているためである．接線が x 軸と交わる点（$y = 0$）において，接線より上にあ

る元の曲線は必ず正の値をとるため，より小さな上界 s_0 を幾何学的に確実に見つけることができる．

このような状況を踏まえ，われわれは集合 $\mathbb{R}$ において以下の事実を公理[†5]として認めることにする．

Axiom 3.1.2: 実数の連続性

$A \subset \mathbb{R}$ とする．$A \neq \varnothing$ が上に有界であるとき，$\sup A$ が $\mathbb{R}$ の中に存在する．

ここまでで実数の連続性について確認した．以降でそれを用いて様々な命題を証明していく．

3.2　単調収束定理

Definition 3.2.1: 単調増加・単調減少

実数列 $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ において，

- 任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して $a_n \leqq a_{n+1}$ が成り立つとき，(a_n) は**単調増加**であるという．特に $a_n < a_{n+1}$ が成り立つときは**狭義単調増加**であるという．
- 任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して $a_n \geqq a_{n+1}$ が成り立つとき，(a_n) は**単調減少**であるという．特に $a_n > a_{n+1}$ が成り立つときは**狭義単調減少**であるという．

Theorem 3.2.2: 単調収束定理

(1) 上に有界な単調増加数列 $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ は，上限 $s = \sup\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ に収束する．
(2) 下に有界な単調減少数列 $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ は，下限 $i = \inf\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ に収束する．

証明.
前半の主張を示す（後半も同様に示せる）．数列の項からなる集合を $A := \{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ とおく．A は空でなく，かつ仮定により上に有界であるから，実数の連続性（上限性質）により上限 $s := \sup A$ が実数として存在する．

上限の定義より，任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して $a_n \leqq s$ が成り立つ．次に，任意の $\varepsilon > 0$ をとる．$s - \varepsilon < s$ であるから，$s - \varepsilon$ は A の上界ではない．したがって，ある $n_0 \in \mathbb{N}$ が存在して $s - \varepsilon < a_{n_0}$ が成り立つ．

ここで，(a_n) は単調増加であるから，すべての $n \geqq n_0$ に対して $a_{n_0} \leqq a_n$ である．ゆえに，$n \geqq n_0$ ならば

$$s - \varepsilon < a_{n_0} \leqq a_n \leqq s < s + \varepsilon$$

が成り立ち，これは $|a_n - s| < \varepsilon$ を意味する．したがって $\lim_{n\to\infty} a_n = s$ である．これが示すべきことで

[†5] 数学において，最初の前提になる事実は公理と呼ばれる．公理は推論のための前提にすぎず，誰もが認める自明の事柄などではない．

あった．　□

この事実は，$\lim_{n\to\infty}(1+1/n)^n$ のような数列の極限を求める際に非常に有用である．実際，数列 $a_n = (1+1/n)^n$ は単調増加であることが容易に確認できる．さらに，$a_n < 3$ であることも確認できるから，単調収束定理により，a_n はある実数に収束する．この数列の極限は「ネイピア数」と呼ばれ，e と表される．さらに，e は無理数であることも知られている．

3.3　アルキメデスの原理

Theorem 3.3.1: アルキメデスの原理

任意の実数 $a > 0$ および $b > 0$ に対して，

$$na > b$$

をみたす自然数 $n \in \mathbb{N}$ が存在する．これは，自然数の集合 $\mathbb{N}$ が $\mathbb{R}$ において上に有界ではないことと同値である．

証明.

主張の後半（$\mathbb{N}$ が上に有界でないこと）を示せば，任意の b/a に対してそれより大きい n を取れるため，前半も示される．いま，$\mathbb{N}$ が上に有界であると仮定し，矛盾を導く．**Axiom 3.1.2** により，上限 $s := \sup \mathbb{N}$ が実数として存在する．上限の定義から，$s-1$ は $\mathbb{N}$ の上界ではない．したがって，ある $n \in \mathbb{N}$ が存在して，$s-1 < n$ が成り立つ．このとき $s < n+1$ となるが，$n+1$ もまた自然数であるため，これは s が $\mathbb{N}$ の上限（上界）であることに矛盾する．ゆえに，$\mathbb{N}$ は上に有界ではない．　□

アルキメデスの原理は，実数の連続性と密接に関わっており，以下の「有理数の稠密性」と実質的に同値な概念である．

Theorem 3.3.2: 有理数の稠密性

任意の $a, b \in \mathbb{R}$ $(a < b)$ に対して，

$$a < r < b$$

をみたす有理数 $r \in \mathbb{Q}$ が存在する．

「有理数の稠密性」を仮定して「アルキメデスの原理（$\mathbb{N}$ が上に有界でないこと）」を導く過程は以下の通りである．

証明.

任意の $M > 0$ に対して，それよりも大きい自然数 n が存在することを示す．有理数の稠密性の仮定（任意の開区間に有理数が存在すること）に基づき，開区間 $(0, 1/M)$ を考える．このとき，

$$0 < r < \frac{1}{M}$$

を満たす有理数 $r \in \mathbb{Q}$ が存在する．r は正の有理数であるから，自然数 p, q を用いて $r = q/p$ と表せる．ここで，$q \geqq 1$ であるから，

$$\frac{1}{p} \leqq \frac{q}{p} < \frac{1}{M}$$

が成り立つ．この不等式の両辺（正数）の逆数をとることで，

$$M < p$$

を得る．p は自然数であるから，与えられた M に対してそれより大きい自然数の存在が示された．　□

アルキメデスの原理と同値な命題はいくつもある．たとえば

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$$

や

$$\lim_{n\to\infty} n = \infty$$

などもアルキメデスの原理と同値である．

[1], [2], [3] を参考にした.

5 参考文献

[1] 杉浦 光夫. 解析入門. 基礎数学. 東京大学出版会, 1980.
[2] 松坂 和夫. 解析入門. 松坂和夫数学入門シリーズ. 岩波書店, 2018.
[3] 斎藤 正彦. 微分積分学. 東京図書, 2006.

6 索引

Q

$\mathbb{Q}$ の $\mathbb{R}$ における稠密性 21

あ

アルキメデスの原理 21

か

下界 5
極限 11

さ

最小元 4
最大元 4
実数の連続性 20
実数列の収束 11
実数列の発散 12
上界 5

た

単調減少数列 20
単調収束定理 20
単調増加数列 20

は

はさみうちの原理 16

や

有界 6